EUCLIDES

vakblad voor de wiskundeleraar

maart 07

nr 5

jaargang 82

Als ik zeg wiskunde, wat zegt u dan?

Rijk aan betekenis

Wiskunde in wetenschap

Statistiek leren met 'data-analyse'

Verslag vmbo/onderbouw-conferentie

Ostrowskiprijs voor Green en Tao





Orgaan van de Nederlandse Vereniging van Wiskundeleraren

COLOFON

maart 07

nr 5

jaargang 82

Euclides is het orgaan van de Nederlandse Vereniging van Wiskundeleraren.
Het blad verschijnt 8 maal per verenigingsjaar.
ISSN 0165-0394

Redactie

Inzendingen bijdragen

Artikelen/mededelingen naar de hoofdredacteur: Marja Bos,
Koematen 8, 7754 NV Wachtum
E-mail: redactie-euclides@nvvw.nl

Richtlijnen voor artikelen

Tekst liefst digitaal in Word aanleveren; op papier in drievoud. Illustraties, foto's en formules separaat op papier aanleveren: genummerd, scherp contrast.
Zie voor nadere aanwijzingen:
www.nvvw.nl/euclricht.html

Realisatie

Ontwerp en vormgeving,fotografie, drukwerk en mailingservices
De Kleuver bedrijfscommunicatie b.v.
Veenendaal, www.de-kleuver.nl

Nederlandse Vereniging van Wiskundeleraren

Website: www.nvvw.nl

Voorzitter

Marian Kollenveld,
Leeuwendaallaan 43, 2281 GK Rijswijk
Tel. (070) 390 63 78
E-mail: m.kollenveld@nvvw.nl

Secretaris

Wim Kuipers,
Waalstraat 8, 8052 AE Hattem
Tel. (038) 444 70 17
E-mail: w.kuipers@nvvw.nl

Ledenadministratie

Elly van Bemmel-Hendriks,
De Schalm 19, 8251 LB Dronten
Tel. (0321) 31 25 43
E-mail: ledenadministratie@nvvw.nl

Lidmaatschap

Het lidmaatschap van de NVvW is inclusief Euclides.
De contributie per verenigingsjaar bedraagt voor
- leden: € 50,00
- leden, maar dan zonder Euclides: € 35,00
- studentleden: € 26,50
- gepensioneerden: € 35,00
- leden van de VVWL: € 35,00

Bijdrage WwF (jaarlijks): € 2,50
Betaling per acceptgiro. Nieuwe leden dienen zich op te geven bij de ledenadministratie.
Opzeggingen moeten plaatsvinden vóór 1 juli.

Abonnementen niet-leden

Abonnementen gelden steeds vanaf het eerstvolgende nummer.
Niet-leden: € 55,00
Instituten en scholen: € 140,00
Losse nummers zijn op aanvraag leverbaar: € 17,50
Betaling per acceptgiro.

Advertenties

Informatie, prijsopgave en inzending:
Gert de Kleuver,
De Splitting 24, 3901 KR Veenendaal
Tel. (0318) 54 22 43
E-mail: g.de.kleuver@nvvw.nl

Kort vooraf [Marja Bos]

Beelden

Ieder van ons heeft bepaalde beelden en associaties bij het woord 'wiskunde'. Wiskundigen zullen er in het algemeen (!) een positiever beeld van hebben dan niet-wiskundigen. Bij sommige mensen is de afkeer groot, en dat gevoel kán gestoeld zijn op negatieve ervaringen die zij opdeden in hun schooltijd. Anderen hebben tijdens die schooltijd juist veel plezier beleefd aan hun wiskundelessen, ook al lieten ze die wiskunde later misschien wel voor wat-ie was. Wat blijft er eigenlijk van al die lessen over?
De redactie van Euclides is voor de aardigheid een en ander maar eens gaan peilen bij 'de-man-in-de-straat' (waaronder ook enkele vrouwen, trouwens). Representatief was het allemaal niet, maar wél boeiend om te lezen, hopen we. Wordt vervolgd!

Nieuw

Aan het vernieuwingsfront wordt op het moment veel tijd gestoken in de ontwikkeling van de nieuwe examenprogramma's havo/vwo. Het jaar 2010 nadert immers met rasse schreden.
Anne van Streun en Carel van de Giessen leggen u hun ideeën voor om de statistieklijn in wiskunde A (havo en vwo) en wiskunde C (vwo) straks een andere insteek te geven. De nadruk ligt daarbij op exploratieve data-analyse.
Op diverse instellingen voor hoger onderwijs worden, in samenwerking met havo/vwo-docenten, modules wiskunde D ontwikkeld voor de vormgeving van de domeinen 'Wiskunde in Technologie' (havo) en 'Wiskunde in Wetenschap' (vwo), beide met een omvang van 80 slu. In dit nummer van Euclides leest u over de plannen van de Universiteit Twente; in komende nummers volgen bijdragen van andere instellingen.
Het definitieve Visiedocument van cTWO, de vernieuwingscommissie wiskunde, is gereed. Paul Drijvers en Dirk Siersma vertellen erover in hun artikel 'Rijk aan betekenis'. Overigens lijkt het niet onwaarschijnlijk dat 'de operatie-2010' een jaartje doorgeschoven wordt.

Uit, goed voor u

In het voortgezet onderwijs heeft het voorkómen van lesuitval de laatste jaren een hoge prioriteit gekregen. In combinatie met het aandachtspunt van de te realiseren onderwijstijd leidt dit er nogal eens toe, dat leraren 'binnen moeten blijven', dat ze nauwelijks de kans meer krijgen hun neus eens buiten de school te steken. Allerlei nascholingsactiviteiten worden steeds vaker binnen de eigen instelling georganiseerd, waardoor contacten met collega's van andere scholen beperkt blijven. En dat is jammer. Bij de tijd blijven, andere ideeën en praktische suggesties opdoen, vraagtekens plaatsen bij je eigen vanzelfsprekendheden door te merken dat die kwesties op andere scholen helemáál niet zo vanzelfsprekend zijn – soms moet je daarvoor 'naar buiten'. Ook al heeft dat lesuitval tot gevolg.
Misschien stimuleert het verslag op pagina 196 (over een inspirerende conferentie voor docenten vmbo en onderbouw) u daarom ertoe tóch maar weer eens verlof aan te vragen voor 'een dagje uit'.
Zo kunt u zich bijvoorbeeld nog aanmelden voor het Nederlands Mathematisch Congres van 12 en 13 april a.s. Er vindt een prijsuitreiking plaats aan de wereldberoemde jonge wiskundigen Ben Green en Terence Tao voor hun werk op het gebied van de priemgetallen. Verder zijn er verschillende interessante mini-symposia, onder meer over 'echte wiskunde op school' en de geschiedenis van de wiskunde.

Flatland

Van het fantastische boekje 'Flatland: a romance of many dimensions' (Edwin A. Abbott, 1884!) wordt op dit moment in de VS een half uur durende animatiefilm gemaakt, bedoeld voor gebruik in de klas. Tijdens de Nationale Wiskunde Dagen presenteerde producer Seth Caplan alvast enkele fragmenten. Het verhaal helpt bij het nadenken over hogere dimensies. 'Flatland the Movie' zal in de loop van dit voorjaar uitkomen; de film wordt bovendien voorzien van 'teaching notes' (zie voor nadere informatie *www.flatlandthemovie.com*).
Overigens zijn de copyrights van het (ook voor leerlingen goed toegankelijke) boekje inmiddels verlopen, waardoor het gratis downloadbaar is van het internet.
Boekje en film: van harte aanbevolen!

Inhoud

Aan dit nummer werd verder meegewerkt door Peter Boelens, Chris van der Heijden en Klaas-Jan Wieringa.

'Als ik zeg wiskunde, wat zegt u dan?'

[Klaske Blom, Hans Daale, Wim Laaper, Joke Verbeek]

Vooraf
Heeft u enig vermoeden wat een willekeurige voorbijganger zou antwoorden op de vraag: 'Als ik zeg wiskunde, wat zegt u dan?' En u, wat zegt u eigenlijk als u op die manier wordt aangesproken? Begint u te hakkelen of juist te stralen? Grijpt u meteen naar pen en papier om uw gedachten met formules of een schets uit te drukken? Of zwijgt u beschaamd in alle talen?

Hoe wiskundigen 'hun' wiskunde beleven, beschrijft Evelien Bus in haar afstudeerscriptie *Zwoegen door de modder en zweven langs de hemel*. Zij publiceerde hierover onder meer in Euclides, twee jaar geleden[1]. Daarin kwamen thema's aan de orde met fascinerende titels als 'Ploeteren en schitteren', 'Alleen of samen' en 'Overdragen, een kunst op zich'. Wiskundigen zullen zich hierin eigenlijk onmiddellijk (moeten) herkennen. Maar hoe is dit voor niet-wiskundigen? Welk antwoord geven volwassenen die zich door de schoolwiskunde geworsteld hebben en wellicht vreselijke en traumatische herinneringen bewaren aan hun wiskundedocent? Zouden er mensen zijn die in hun werk, tijdens het maken van een Excel-bestandje of het aanslaan van de kassa, terugdenken aan hun wiskundeonderwijs en af en toe stilstaan bij het feit dat ze concreet gebruikmaken van die 'wiskunde'?
Wij wiskundedocenten vinden gecijferdheid belangrijk voor nagenoeg iedereen. Mensen buiten onze beroepsgroep denken er ongetwijfeld vaak anders over. Wat gebruikt een professional in zijn of haar baan nog van op school geleerde wiskunde? Als je achteraf terug kijkt, heeft het dan allemaal zin gehad? Waar denken mensen met plezier aan terug? Waarvan gaan hun haren recht overeind staan?

Wij hebben de vraag maar eens gewoon gesteld aan zomaar wat voorbijgangers en mensen die we tegenkwamen. In dit eerste artikel van een korte serie krijgt u een impressie van de spontane korte reacties van geïnterviewden. In enkele volgende artikelen leest u uitgebreider hoe mensen terugblikken op hun eigen wiskundeonderwijs en wat dit nu nog voor hen in hun huidige werk betekent.


Jolanda


Vera


Chilco

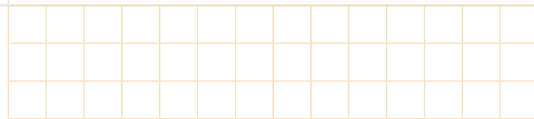

Han


Nando


Wil

Testje
De vraag '*Als ik zeg wiskunde, wat zegt u dan?*' hebben we aan een kleine twintig mensen voorgelegd. Vast geen representatieve steekproef volgens het CBS, vooral niet omdat het merendeel van de ondervraagden een hbo-opleiding genoot. Niettemin leverde de vraag verrassende antwoorden op.
Denkt u dat u wel een beeld heeft van welk soort mensen een bepaald antwoord gaf? Ongetwijfeld, maar doe dan toch maar even mee met ons testje. U ziet hier eerst een kort profiel van een achttal ondervraagden:

- **Joris** (30) / Helmond / Havo en Hogere bosbouwschool / *Wijkbeheerder gemeente* / 8 jaar wiskunde
- **Jolanda** (24) / Amersfoort / MTS elektro-techniek / *Medewerkster reserveringen congrescentrum* / 5 jaar wiskunde
- **Vera** (24) / Westervoort / Mavo en Kappersopleiding ROC / *Kapster* / 3 jaar wiskunde
- **Chilco** (34) / Geldrop / HBO productvormgeving / *Meubelmaker* / 8 jaar wiskunde
- **De heer X** (?) / ? / Havo / *Beeldend kunstenaar* (en daarom graag anoniem) / 3 jaar wiskunde
- **Han** (61) / Tanzania / HBS en HTS werktuigbouwkunde / *Repareert auto's* / 11 jaar wiskunde
- **Nando** (34) / ? / Havo en Psychologie en fysiotherapie / *Onderzoeker* / 10 jaar wiskunde
- **Wil** (37) België / HBO / *Informaticus* / 8 jaar wiskunde



En dan geven we u vervolgens een lijstje met de door hen gegeven antwoorden op onze vraag. Zet u achter elke uitspraak wie volgens u voor welk antwoord verantwoordelijk is?

- Wiskunde? Zonder wiskunde kun je niet veel. Ik heb veel interessante wiskundetheorie geleerd met erg veel nut voor mijn vakgebied.
- Goedendag, waar denk je dan aan? Voor mijn beroep hoeft het niet zo moeilijk te zijn als hoe het in de schoolboeken staat. De helft gebruik je niet in de praktijk.
- Een leuk vak. Maar dat kwam ook door aardige leraren. Niet in elke klas, maar ik heb me in doorsnee best vermaakt. Alle verhalen en contexten hoefden voor mij niet omdat ik daar de zin niet van inzag en nog steeds niet zie.
- Bij wiskunde denk ik aan formules en de stelling van Pythagoras. Ik vond het niet leuk.
- Bij wiskunde denk ik aan getallen, die van Pythagoras en zo. Ik was er heel slecht in, een 2 had ik. Mijn leraar gaf me bijles, maar het hielp niets. Ik vond het vreselijk.
- Wiskunde? Ik denk aan formules. Nog meer? O, die vierkanten en zo.
- Wiskunde? Ik denk aan die foefjes die we moesten leren. (Boos:) We leerden veel dingen die we geen plaats konden geven in een groter geheel en waarvoor we ook geen toepassing wisten.
- Nachtmerrie, vanwege dyscalculie, een term die ik pas kortgeleden opgeplakt heb gekregen, maar die me wel met terugwerkende kracht erkenning geeft voor al mijn problemen met wiskunde.

De juiste antwoorden vindt u op pag. 186.

Tevreden over uw mensenkennis?

'Als ik zeg wiskunde, wat zegt u dan? '
Nog een serie antwoorden:

- Ik heb het nooit leuk gevonden op school. Het beroerde was dat ik er in mijn werk steeds meer mee geconfronteerd werd.
- Ik zit meteen in de meetkundehoek. Pietje Apegras en zo. Dat is mij het meeste bijgebleven.
- Analytisch denken, da's belangrijk. Problemen leren oplossen, niet zozeer met formules want die zitten al in de computer.
- Dat is toch gewoon rekenen?
- Wiskunde is voor mij werken met getallen.
- Moeilijk vak op school – en niet mijn hobby.

Imagoverbetering

Er zitten natuurlijk verschillen tussen deze antwoorden, maar om nou te zeggen dat de teneur echt positief is… Er valt in dat opzicht nog een wereld te winnen. Misschien moet je wel een echte idealist zijn om te hopen dat jouw leerlingen de wiskundelessen (en jou als docent) later met terugwerkende kracht als spannend, interessant en verrijkend ervaren. Maar misschien heeft het helemaal niets met de persoon te maken en ligt het aan het curriculum dat dit niet het geval is. Bovendien, wellicht krijg je dezelfde soort antwoorden als je de vraag zou stellen over een willekeurig ander schoolvak – of is deze verklaring een exact voorbeeld van onwenselijk vluchtgedrag?

De vraag aan onszelf moet zijn of wij als individuele docent iets kunnen verbeteren aan het imago van wiskunde. Wellicht is het zo dat het beeld van ons vak de laatste jaren al sterk veranderd is en dat de leerlingen van nu heel andere antwoorden op dezelfde vraag geven. Maar wat te doen met het gegeven dat Wil, onze meest positieve antwoordgever, wiskundeonderwijs heeft genoten in België? Is dat toeval of moeten we toch maar eens vaker en beter naar onze zuiderburen gaan kijken?
Als u als betrokken lezer antwoorden heeft op bovenstaande vragen of als u dit fenomeen wilt gaan onderzoeken, dan bent u van harte uitgenodigd ons daarvan kond te doen. We stellen de kolommen van Euclides graag open voor uw bijdrage.

Wiskunde en beroep

Vervolgens vraag twee: *'Gebruikt u wiskunde bij het uitoefenen van uw beroep?'*, gesteld uit nieuwsgierigheid naar nut en noodzaak van ons aller dierbaar vak. Hierbij wordt een heel breed scala aan antwoorden gegeven, van 'Ik werk in een IT-bedrijf en gebruik daarbij veel wiskunde in ict-toepassingen' tot 'Ik gebruik volgens mij nooit de wiskunde van school in mijn beroep.'
Toch geven de meeste mensen aan, wel op een of andere manier wiskunde te gebruiken:

- De conducteur: 'Ik moet veel hoofdrekenen.'
- De modeontwerpster: 'Ik heb wiskunde nodig bij patroontekenen. Ik moet lengte- en omtrekberekeningen kunnen maken met behulp van verhoudingstabellen.'
- De werktuigbouwkundige: 'Ik heb wiskunde nodig bij technisch tekenen, gonio, krachten, berekenen van constructies.'
- De tandarts: 'Wij gebruiken computers, maar ik wil wel het gevoel hebben dat ik het ook zelf had kunnen uitrekenen.'
- En de accountmanager van een bank alsmede een bouwkundig ingenieur gaven eigenlijk hetzelfde antwoord.
- Als wijkbeheerder van de gemeente gebruikt Joris zijn kennis over oppervlaktes, maar ook zijn kennis van de statistiek bij het nemen van beslissingen. 'Laatst wilde iemand de zebrapaden afschaffen omdat uit onderzoek was gebleken dat daar 40 procent van de ongelukken met voetgangers gebeurde. Toen ben ik dat gaan uitzoeken en heb ik het totaal aantal voetgangersbewegingen en dergelijke laten meewegen. Vervolgens bleek, dat oversteken op een zebrapad vier keer zo veilig is als het oversteken elders. Kijk, dat heb ik op de havo in de wiskundelessen geleerd. En… natuurlijk hebben we toen de zebrapaden in Eindhoven gewoon daar gelaten waar ze al waren.'

Leuk toch?

- We kijken natuurlijk niet gek op van de meubelontwerper, die zegt de hele dag wiskunde te gebruiken bij 'lengtes opmeten, rekenen met verhoudingen, op schaal tekenen, maquettes maken'.

- Ook is het logisch dat de projectingenieur aangeeft dat hij ‘in allerlei toepassingen van Autocad wiskunde gebruikt’; overigens zodanig dat hij door Autocad ‘niets meer zelf hoeft uit te rekenen met sinussen en cosinussen.’
- De beeldend kunstenaar echter en de kapster zeggen nooit wiskunde te gebruiken; de beeldend kunstenaar omdat hij alleen maar met computers en films werkt. Maar kapster Vera komt na enig aandringen toch op haar woorden terug. In eerste instantie vertelt ze: ‘Ik moet wel iets met waterstofperoxide uitrekenen, maar dat is scheikunde. En de kassa telt zelf alles op dus dat hoef ik niet te doen. Nee hoor, wiskunde is echt nergens voor nodig.’ Dan komt ze even later stralend met een aanvulling: ‘Ja, eigenlijk toch wel. Als ik voor een bepaald kapsel het haar rechtstandig moet afknippen, is dat een hoek van 90 graden. Dat is wiskunde. Maar ik heb nooit nagemeten met de geodriehoek of het echt 90 graden is, hoor.’

Leuke antwoorden eigenlijk, allemaal.

Doorgronden

Het meest filosofische antwoord komt van onderzoeker Nando, na een lange stilte: ‘De vraag is of wat ik nu gebruik als wiskunde moet en kan worden gezien. Het is net zo’n vraag als bij Latijn: Wat heb je er later eigenlijk aan? Ik denk toch dat, zoals altijd wordt gezegd, je er een analytisch vermogen mee hebt opgebouwd. Het helpt je zonder meer in bepaalde situaties om snel een en ander te doorgronden. Je voelt snel of een bepaalde verklaring of redenering klopt, of de kwantitatieve uitkomsten realistisch zijn. Ja en verder, het is ook handig bij het koken.’

Nou, laten we het daar dan maar bij houden voor dit moment.

Noot

[1] *Euclides*, jaargang 80, nrs. 5 en 6, maart en april 2005.

Over de auteurs

Klaske Blom, Hans Daale, Wim Laaper en Joke Verbeek maken deel uit van de redactie van Euclides.
E-mailadres: *redactie-euclides@nvvw.nl*

Rijk aan betekenis



Het document van cTWO in vogelvlucht

[Dirk Siersma, Paul Drijvers]

Inleiding
Op dit moment worden wiskundesecties van havo en vwo in beslag genomen door de veranderingen rond wiskunde ABCD in de Tweede Fase zoals die het komende schooljaar in klas 4 hun beslag zullen krijgen. Voor wiskunde is deze verandering, onder andere door de invoering van wiskunde C en wiskunde D, ingrijpender dan voor de andere exacte vakken. Informatie over deze 2007-operatie vindt u in het artikel van Henk van der Kooij of op de website van de digitale school (zie referenties en Websites).
Zoals u wellicht weet, loopt er echter een tweede veranderingsproces dat leidt tot meer inhoudelijke herzieningen bij de verschillende bètavakken in de Tweede Fase met ingang van het schooljaar 2010-2011 in klas 4. Om aan dit tweede proces sturing te geven heeft het ministerie van OC&W voor biologie, scheikunde, natuurkunde, wiskunde en het nieuwe bètavak natuur, leven en technologie stuurgroepen of vernieuwingscommissies in het leven geroepen.
De vernieuwingscommissie wiskunde heet *commissie Toekomst WiskundeOnderwijs* (cTWO) en staat onder voorzitterschap van Dirk Siersma, hoogleraar wiskunde aan de Universiteit Utrecht. De opdracht van cTWO omvat het vaststellen van examenprogramma's voor wiskunde A, B, C en D voor havo en vwo per 2010 en het adviseren over doorlopende leerlijnen en didactische ontwikkelingen. Ook de invulling van wiskunde D per 2007 is door de commissie ter hand genomen (Drijvers, 2006).
Met alle begrip voor het belang van de korte termijn vraagt dit artikel uw aandacht voor de iets langere termijn, de operatie-2010. Na de installatie in november 2005 is cTWO begonnen met het schrijven van een visiedocument dat de uitgangspunten voor het toekomstige wiskundeonderwijs beschrijft en daarmee richtingbepalend is voor de te ontwerpen nieuwe examenprogramma's. In dit artikel wordt het ontwikkelproces van dit visiedocument kort beschreven, worden de hoofdpunten toegelicht en wordt aangegeven op welke manier de commissie haar werk voortzet. De volledige tekst van het visiedocument is beschikbaar op *www.ctwo.nl.*

Proces
Het ontwikkelen en beschrijven van een visie op toekomstig wiskundeonderwijs is niet eenvoudig, zeker niet in een toch vrij heterogene commissie waarin verschillende invalshoeken zijn vertegenwoordigd. Binnen cTWO zijn uitgebreide discussies gevoerd over inhoud, opzet, stijl en vorm van het visiedocument. Terugkijkend kun je zeggen dat we in feite drie keer opnieuw zijn begonnen. Dat maakt kennelijk onderdeel uit van een dergelijk proces.
Het resultaat hiervan is een convergentie van standpunten en ideeën zoals neergelegd in het concept-visiedocument. De commissie heeft gekozen voor een brede taakopvatting, waarin wordt geprobeerd het wiskundeonderwijs in al haar facetten te belichten. Dat komt tot uitdrukking in onderwerpen als de rol van de docent, professionalisering en nascholing, en ook in de wellicht geringe aandacht voor de concrete uitwerking van de taken, zoals de examenprogramma's. De concretisering van de visie is een volgende stap, die echter naar de overtuiging van de commissie beter kan worden gezet als eerst een heldere globale visie is ontwikkeld.
Het concept-visiedocument is onderwerp geweest van een brede veldraadpleging. Verschillende instanties, zoals VSNU, HBO-raad, NVvW, KNAW, is gevraagd op het concept te reageren. De door OCW ingestelde resonansgroep heeft eveneens commentaar gegeven. Voor docenten zijn bijeenkomsten belegd, die, ondanks de mogelijke discussiemoeheid na alle politieke koerswijzigingen van de afgelopen jaren, goed zijn bezocht. Daarnaast hebben velen gereageerd via het forum van de cTWO-website. Op deze site staat het merendeel van de schriftelijke reacties. cTWO is dankbaar voor de grote betrokkenheid die uit alle reacties naar voren komt en voelt zich daardoor gesteund in haar werk.
Hoewel er in grote lijnen veel waardering spreekt uit de reacties op het concept-visiedocument, zijn er veel plaatselijke suggesties ter verbetering gemaakt. Voor een deel betreffen die eenvoudige fouten of onduidelijkheden. Vanuit de veldraadpleging is vooral de wens naar voren gekomen om op een aantal punten wat concreter te zijn. Meer inhoudelijke commentaren betreffen vooral de rol van ICT, de plaats van vaardigheden en de manier waarop contexten in het leerproces zijn geïntegreerd. Deze commentaren zijn verwerkt in de eindversie, die dus op hoofdlijnen niet van het concept-visiedocument afwijkt, maar op veel onderdelen is aangescherpt en bijgesteld. Op dit moment is de eindversie in druk. De tekst zelf is al beschikbaar op *www.ctwo.nl.*

Product
Wat zijn de hoofdpunten uit het product van dit alles, het visiedocument? Behalve een inleiding en enkele bijlagen kent het stuk de volgende opbouw in hoofdstukken:
1. Toekomstperspectief
2. Wiskundeonderwijs rijk aan betekenis
3. Gedifferentieerde onderwijsdoelen
4. Wiskundige concepten en denkactiviteiten
5. De docent centraal
6. Didactische vormgeving
7. De rol van ICT
8. Aansluiting en leerlijnen
9. Toetsing en examinering
10. Implementatie, scholing en nascholing

Elk van de hoofdstukken bevat een of meer standpunten, die de kern ervan samenvatten. In het bestek van dit artikel is het niet haalbaar om alle onderwerpen te bespreken. Daarom beperkt het vervolg zich tot de hoofdpunten die de meeste discussie oproepen, namelijk de rol van de docent, het gebruik van contexten, de plaats van ICT, het belang van vaardigheden en de veranderingen in de onderbouw.

De rol van de docent

Op verschillende plaatsen in het visiedocument wordt benadrukt dat de docent een cruciale rol speelt in het leerproces, die onder invloed van de studiehuisgedachte de laatste jaren te weinig erkenning heeft gekregen. Wiskunde leren doe je in interactie met medeleerlingen en met een vakinhoudelijk en vakdidactisch deskundige docent. Dit is een broos proces van geleidelijke groei, waarin leerlingen continu begeleid moeten worden. Interactie is niet alleen nodig voor het ontstaan van inzicht maar ook voor het verwerven van vaardigheden. Daarom is voor goed wiskundeonderwijs uitgebreide contacttijd nodig. Als vuistregel dient elk uur studielast ook werkelijk op jaarbasis in minimaal ¾ uur contacttijd te worden vertaald, wat op dit moment op veel scholen niet het geval is.
Behalve van contacttijd benadrukt de commissie ook het belang van vakinhoudelijke en vakdidactische expertise. Dat dit in de wet op de Beroepen in het onderwijs (BIO) slechts één van de zeven competenties vormt, is natuurlijk onterecht. In de lerarenopleidingen dienen vakinhoud en vakdidactiek een grotere plaats te krijgen. Verder kan structurele samenwerking tussen post-hbo eerstegraads lerarenopleidingen en de universitaire eerstegraads lerarenopleidingen de kwaliteit en kwantiteit van de uitstroom van gekwalificeerde eerstegraads wiskundeleraren vergroten.
In het verlengde van het voorafgaande is er behoefte aan een permanent professionaliseringsaanbod voor docenten, dat enerzijds een niet te vrijblijvend karakter moet hebben maar anderzijds ook moet kunnen leiden tot verbeterde carrière- en salarisperspectieven.

Het gebruik van contexten

Het gebruik van contexten is niet onomstreden. Waar de andere exacte vakken de zogeheten *context-concept-benadering* propageren, constateert men binnen cTWO een zekere spanning tussen het gebruik van contexten en abstractie. Contexten schieten hun doel voorbij als ze niet uitnodigen tot abstractie. Horizontaal mathematiseren, het gebruik van wiskundige middelen om de wereld om ons heen te organiseren, zonder verticaal mathematiseren, waarbij het bouwwerk van de wiskunde ontstaat door abstractie, is in het algemeen ongewenst. Ook is er bezwaar tegen een overdaad aan steeds wisselende 'verhaaltjessommen' die niet erg realistisch zijn.
De commissie ziet verschillen tussen de wijze waarop contexten functioneren bij wiskunde A en C enerzijds en bij B en D anderzijds. Contexten bij wiskunde A en C hebben overwegend een didactisch en maatschappelijk karakter en worden gezocht in de belevingswereld van leerlingen en in maatschappelijke situaties of levenswetenschappen – denk aan populatiedynamica en exponentiële groei. De kracht van wiskundige concepten kan blijken uit hun toepasbaarheid in diverse contexten.
Bij wiskunde B en D zijn wiskundige en toegepaste contexten van belang die bijdragen aan de versterking van interne structuur en samenhang van de verschillende onderdelen van de wiskunde. In dit verband pleit de commissie voor een beperkt aantal diep uitgewerkte contexten, die een intuïtief denkmodel vormen bij een concept of methode; vergelijk de paradigmatische voorbeelden, Freudenthal, 1978. Zulke contexten zijn afkomstig uit natuurwetenschappelijke domeinen zoals bijvoorbeeld mechanica of optica. Daarnaast zijn er didactische contexten die sterk gestileerd kunnen zijn zonder aan kracht te verliezen; denk bijvoorbeeld aan het vaasmodel in de kansrekening. In het algemeen kan bij wiskunde B en D, zeker op het vwo, directer op abstractie worden afgestevend.
Ook de rol van contexten bij het centraal examen verdient heroverweging. De contexten in de huidige examens wiskunde B zijn – met uitzondering van kansrekening en statistiek – soms irrelevant voor de getoetste kennis en vaardigheden; zulke contexten verlenen de examenvragen geen extra betekenis of zin, maar leiden af en maken het de kandidaat lastiger (Kleijne, 2006). Voor wiskunde B, en op termijn mogelijk voor wiskunde D, pleit de commissie er daarom voor buitenwiskundige contexten alleen te gebruiken wanneer de aard van de opgave daar specifiek om vraagt.

De plaats van ICT

In samenleving en beroepspraktijk heeft ICT een steeds grotere plaats, die het onderwijs niet kan en mag negeren. Maar wat is de rol van ICT in het leerproces?
De inzet van moderne ICT-middelen in het wiskundeonderwijs bevindt zich in de beginfase. De ervaringen met de invoering van de grafische rekenmachine zijn niet alleen positief: mede door de beschikbaarheid van de grafische rekenmachine is de toetsing van algebraïsche vaardigheden op het Centraal Examen in het verleden onvoldoende uit de verf gekomen, al geven de examens wiskunde B1 en B12 van 2006 een gunstiger beeld. De commissie adviseert dan ook om de rol van dit apparaat bij het huidige CE te herbezien.
In de visie van de commissie dienen ICT-gereedschappen in handen van de leerling als verrijking en verdieping. Geavanceerde ICT-tools kunnen werk uit handen nemen en concentratie op hoofdzaken bevorderen. Het is echter van groot belang dat hiervan geen negatieve invloed uitgaat op de beheersing van basisvaardigheden. Voldoende basisvaardigheid en parate kennis zijn onontbeerlijk voor het wiskundig inzicht en voor een efficiënte probleemaanpak. Het ICT-gebruik dient gericht te zijn op 'use to learn' in plaats van 'learn to use'.
Een aantal fundamentele vragen is echter nog niet beantwoord. Hoe kunnen leerlingen bijvoorbeeld leren ICT op een verstandige manier bij het wiskundige werk te betrekken, zeg maar 'use to apply'? Hoe gaan 'learn to use' en 'use to learn' op een natuurlijke manier hand in hand en zijn ze aanleiding tot het verwerven van wiskundig inzicht en vaardigheid? Daarnaast is het onderscheid tussen rekenmachine en computer snel aan het vervagen. Er is alle reden om aan te nemen dat in 2010 draagbaar materieel gebruikt zal kunnen worden dat meer lijkt op de huidige computers dan op de huidige grafische rekenmachine. De vraag is hoe de onderwijspraktijk daarvan het best kan profiteren. Om deze en andere vragen te beantwoorden zijn toegepast didactisch onderzoek en goed gecontroleerde onderwijsexperimenten noodzakelijk die leiden tot een eenduidige wijze van inzet en bijbehorende nomenclatuur.

Het belang van vaardigheden

In het visiedocument worden de kernconcepten getal, formule, functie, verandering, ruimte en toeval onderscheiden. Als centrale denkactiviteiten worden genoemd modelleren en algebraïseren, ordenen en structureren, analytisch denken en probleemoplossen, formules manipuleren, abstraheren, en logisch redeneren en bewijzen. Het concept 'formule' en de activiteit 'formules manipuleren' staan sterk in de belangstelling, onder andere vanwege klachten uit het vervolgonderwijs over het gebrek aan vaardigheden op dit punt.
Het omgaan met algebraïsche formules en expressies is een belangrijke vaardigheid, die echter zelden geïsoleerd op zichzelf staat. Het gericht omvormen van formules vraagt om inzicht in de structuur van de formule en om zicht op het te volgen oplossingsproces als geheel. In dit verband wordt van 'symbol sense' gesproken (Arcavi, 2005). Onderzoek toont aan dat dergelijk inzicht zich niet eenvoudig laat verwerven en toepassen en dat het variabele begrip hierin een grote rol speelt (Malle, 1993).
Daarnaast dient de leerling over handmatige vaardigheden te beschikken om deze processen correct uit te voeren. Het gaat dus om een combinatie van 'symbol sense' en formulevaardigheid.
Het huidige onderwijs schiet op beide aspecten tekort. Veel leerlingen beheersen de algebraïsche basistechnieken (rekenen met machten, wortels en breuken, werken met haakjes, ontbinden in factoren, rekenen met rationale uitdrukkingen) niet meer met de hand; daarnaast kunnen velen niet inzichtelijk omgaan met variabelen, formules en vergelijkingen.
Formulevaardigheid dient inzichtelijk verworven te worden en moet dan op een routineniveau uitgevoerd kunnen worden – met inzicht, gegeneraliseerd, doelbewust, snel en zonder haperen. Per schooltype en wiskundevak wordt een repertoire aan basistechnieken voor het aanpakken van echte problemen en het zinvol inzetten van apparatuur vastgesteld, waarover leerlingen moeten beschikken. Dit repertoire moet afzonderlijk worden getoetst op een hoog niveau van beheersing. Ook op de centrale examens moeten dergelijke vaardigheden aan de orde komen.

Veranderingen in de onderbouw

De uniformiteit in gemeenschappelijke doelen, niveaus en wiskundige inhouden, waarvan de basisvorming indertijd uitging, is slecht gebleken voor de ontwikkeling van de talenten van leerlingen van met name havo en vwo. Deze krijgen in de onderbouw te weinig kansen om vaardigheden te ontwikkelen en inzicht te verwerven in de onderliggende wiskundige concepten. Dit is één van de oorzaken van de slechte aansluiting van onderbouw op bovenbouw. Bovenop de gemeenschappelijke doelen van algemeen wiskundeonderwijs voor de gehele populatie van 12-16 jaar moeten er dan ook duidelijke differentiële doelen komen voor (delen van) de groep havo-vwo leerlingen. Dit bevordert de aansluiting op de bovenbouw en ontwikkelt de talenten van leerlingen beter dan nu het geval is.
Wiskunde kent, ook als schoolvak, een sterk gestapelde structuur. Elk nieuw concept bouwt voort op het gebruik van en inzicht in eerder geleerde begrippen. Vandaar het belang van zorgvuldig vormgegeven doorlopende leerlijnen. In het bijzonder

Aankondiging /
Doe mee aan TIMSS-Advanced 2008

Hoe goed scoren onze bèta-leerlingen aan het einde van het vwo ten opzichte van andere landen? Deze vraag staat centraal in *TIMSS-Advanced*.
Sinds 1995 meet 'Trends in International Mathematics and Science Study' (TIMSS) elke vier jaar de leerprestaties van leerlingen in de exacte vakken in het basis- en voortgezet onderwijs. Tot nu toe hebben Nederlandse leerlingen het in TIMSS heel goed gedaan. Nederland staat zowel voor rekenen en wiskunde als voor de natuurwetenschappelijke vakken in de top tien van de best presterende landen. Het instroomniveau van studenten die met een exacte studie beginnen, blijkt echter niet altijd overeen te komen met de verwachting van universiteiten en hogescholen.

Om meer te weten te komen over het niveau van vwo-eindexamenleerlingen in de exacte vakken neemt Nederland in 2008 voor de eerste keer deel aan het internationale project *TIMSS-Advanced*. 'Advanced' verwijst naar de doelgroep: leerlingen die op het meest gevorderde niveau eindexamen doen in wis- en natuurkunde. In elk deelnemend land wordt een toets afgenomen en informatie verzameld over de leercontext. Binnenkort zullen zo'n 270 vwo-afdelingen benaderd worden om in het vroege voorjaar van 2008 de wiskunde- of de natuurkundetoets af te nemen. De Universiteit Twente kijkt alle toetsen na en informeert uiteraard de scholen over de resultaten.
TIMSS-Advanced zal niet alleen meer duidelijkheid geven over hoe goed Nederlandse vwo-leerlingen in wis- en natuurkunde zijn ten opzichte van vergelijkbare leerlingen in andere landen, maar zal ook meer inzicht geven in de knelpunten die scholen, docenten en leerlingen in deze vakken tegenkomen.

Verdere informatie

Meer informatie over TIMSS-Advanced is te vinden op *http://timss.gw.utwente.nl*.
TIMSS-Advanced is een NWO/PROO-onderzoek.
Projectleider: dr. Martina Meelissen, Faculteit Gedragswetenschappen, Universiteit Twente.
E-mailadres: *m.r.m.meelissen@gw.utwente.nl*

betekent dit dat deze lange leerlijnen al moeten aanvangen in de nieuwe onderbouw. Hetzelfde geldt voor de routinematig te beheersen vaardigheden en de parate kennis van eigenschappen en begrippen die op hun beurt weer bouwstenen vormen voor nieuw te ontwikkelen concepten.
De commissie pleit dan ook voor een geleidelijke differentiatie voor wiskunde in de derde klas, zonder dat dit tot een overladen programma of onomkeerbare keuzes leidt. Geschikte onderwerpen stellen leerlingen in staat zich in klas 3 een adequaat beeld te vormen van de wiskunde in de verschillende profielen van de Tweede Fase en maken een oriëntatie op en determinatie voor de nieuwe wiskundevakken in het vierde leerjaar mogelijk.

Vervolg

Tot zover de schets van enkele hoofdpunten uit het visiedocument. Hoe nu verder? Het is zaak de mooie maar wellicht ook wat idealistische ideeën uit het visiedocument te concretiseren en te specificeren voor de verschillende schooltypes (havo en vwo) en voor de wiskundevakken ABCD. Inmiddels is de commissie in hoog tempo bezig globale concept-examenprogramma's voor 2010 op te stellen. Dat gebeurt in programmacommissies, die bestaan uit leden van cTWO aangevuld met docenten en externe deskundigen. Daarnaast is een aantal werkgroepen actief om de plannen verder uit te werken in lesmateriaal. Afstemming met de ontwikkelingen bij andere vakken vindt plaats in de afstemmingsgroep wiskunde-natuurkunde, in het bètaoverleg waarin alle vernieuwingscommissies participeren en in de coördinatiecommissie, waarin ook OCW, CEVO en Cito zitting hebben. Ook met de uitgevers vindt regelmatig overleg plaats.
De kortetermijnplanning is dat de concept-examenprogramma's in het voorjaar van 2007 aan het veld worden voorgelegd in een zo breed mogelijke reactieronde. Op basis van de reacties worden rond de zomer nieuwe versies van de concept-examenprogramma's opgeleverd. Deze vormen de basis voor uitwerkingen in de vorm van syllabi en handreikingen, die de experimenteerscholen houvast moeten bieden voor de examenexperimenten, die in het schooljaar 2008-2009 van start gaan. Al eerder, in 2007-2008, zullen deelexperimenten plaatsvinden.

Het is duidelijk dat cTWO voor een belangrijke taak staat die in een krap en intensief tijdschema moet worden gerealiseerd. We gaan ervan uit dat de betrokkenheid van het veld, zoals we die ervaren, ook de komende tijd bijdraagt aan de totstandkoming van vernieuwd wiskundeonderwijs in de Tweede Fase.

Websites

- *www.ctwo.nl*
- *www.digischool.nl/wi/wiscom/examenprog-2007.htm*

Referenties

- A. Arcavi (2005): *Developing and using symbol sense in mathematics*. In: *For the Learning of Mathematics,* 25(2), pp. 42-47.
- P. Drijvers (2006): *Wiskunde D, uitdagend en relevant*. In: *Euclides,* 81(7), pp. 327-330.
- W. Kleijne (2006): *Contexten in de examens wiskunde B*. In: *Euclides,* 82(1), pp. 20-22.
- H. van der Kooij (2006): *De wiskunde-examenprogramma's havo en vwo vanaf 2007*. In: *Euclides,* 81(7), pp. 322-326.
- H. Freudenthal (1978): *Weeding and Sowing - Preface to a Science of Mathematical Education*. Dordrecht Kluwer Academic Publishers.
- G. Malle (1993): *Didaktische Probleme der elementaren Algebra*. Braunschschweig: Vieweg.

Over de auteurs

Dirk Siersma is hoogleraar wiskunde aan het Mathematisch Instituut van de Universiteit Utrecht. Hij schrijft dit artikel als voorzitter van de commissie Toekomst WiskundeOnderwijs.
Paul Drijvers is senior onderwijsontwikkelaar bij Fisme (spreek uit fi-es-em-ee), het Freudenthal Instituut voor didactiek van wiskunde en natuurwetenschappen van dezelfde universiteit. Dit artikel schrijft hij als secretaris van de commissie Toekomst WiskundeOnderwijs.
De commissie is bereikbaar via e-mailadres *info@ctwo.nl* en URL *www.ctwo.nl*.

Wiskunde in wetenschap

Visie op een domein in wiskunde D

[Universiteit Twente – kerngroep]

**Wat is wetenschapsbeoefening, welke rol speelt wiskunde hierin, en wat betekent dat voor het onderwijs in de bovenbouw van het vwo?
Geïnspireerd door een oproep van de vernieuwingscommissie cTWO gericht aan het adres van het wetenschappelijk onderwijs, wordt er dit schooljaar aan de Universiteit Twente een leerstofdomein 'Wiskunde in Wetenschap' ontwikkeld door een kerngroep van UT- en vwo-docenten. Dit lesmateriaal is bedoeld voor het nieuwe vak Wiskunde D, maar (deels) ook voor Natuur, Leven en Technologie (NLT). Het wil aan de hand van uitdagende cases de leerlingen laten ervaren dat het proces van (wiskundig) modelleren problemen doet begrijpen en ze toegankelijk maakt voor oplossingen.**

Wetenschap

Wetenschap, bedreven vanuit nieuwsgierigheid of doelgerichtheid, stelt zichzelf vragen om (natuur)verschijnselen te kunnen begrijpen. Om het denken richting te geven en om van gedachten te wisselen is een 'taal' vereist waarin begrippen worden ontwikkeld. Deze begrippen beschrijven de meest in het oog lopende aspecten van het verschijnsel. Zij dienen zo precies mogelijk geformuleerd te worden en moeten eenduidig zijn.
Er worden niet alleen begrippen, maar ook relaties tussen die begrippen gezocht; juist daardoor ontstaat inzicht in het probleem. Of het leidt tot de noodzaak meer begrippen in te voeren en/of andere relaties te onderzoeken. Al doende gaan we meer 'begrijpen' van het verschijnsel. Dit geheel van begrippen en relaties is een bouwwerk dat een 'model' is van het te onderzoeken probleemgebied.
Omgekeerd, bij het denken of communiceren over welk onderwerp dan ook gebruiken we een (al dan niet expliciet gemaakt) achterliggend model. Als verschillende mensen onbewust verschillende modellen gebruiken kan dat gemakkelijk aanleiding geven tot misverstanden of onbegrip. Bijvoorbeeld: algemene uitspraken over economie, gezondheid etc. hangen voornamelijk af van welk aspect men daarvan wil benadrukken. Juist als daarvoor gekwantificeerde grootheden worden gebruikt (winst van bedrijven, aantal werklozen, cholesterolgehalte, etc.) moet het belang daarvan worden onderkend. De keuze van de beschouwde grootheden kan de discussie over de resultaten van het model verhelderen.
Voorbeelden uit het dagelijkse leven zoals hierboven gegeven kunnen leerlingen het belang illustreren van het expliciet maken van het gebruikte model. Het valt daarbij op te merken dat bovenstaande geldt voor alle wetenschappen, van natuurwetenschappen tot geestes- en sociale wetenschappen. Bovendien moet benadrukt worden dat alleen 'logisch redeneren' (meestal stilzwijgend) geaccepteerd is als methode om uit gekozen begrippen/grootheden en daarvan afgeleide (of aangenomen) relaties conclusies te trekken. De inductieve manier van redeneren wordt vaak toegepast bij het opstellen van een model, waarbij het logisch redeneren slechts ten dele aan de orde is. Er spelen nogal eens voorkeuren, ingeslepen (voor)oordelen en toevalligheden mee. Van belang wordt dan de terugkoppeling van meetresultaten of uitkomsten van berekeningen naar de werkelijkheid.

Wiskunde

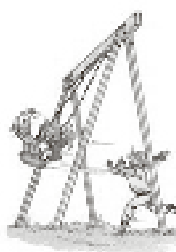
In het voorafgaande is betoogd dat het exact formuleren van begrippen en relaties tot een model leidt dat het denkkader gaat vormen waarmee via logisch redeneren kennis wordt ontwikkeld over het te onderzoeken probleemgebied. Met al deze activiteiten wordt in veel gevallen wel wat slordig omgesprongen, maar dit erkent in principe de nauwkeurige werkwijze van de wiskunde als ideaaltypisch voorbeeld. Dit is op zich al voldoende reden om modelleren te zien als een (toegepast) wiskundige activiteit.
Meer klassiek gesproken, en niet minder belangrijk maar wel meer vertrouwd, komt de wiskunde in beeld zodra de boven beschreven structuur geformaliseerd wordt en wiskundige technieken worden gebruikt voor nader onderzoek. In bijvoorbeeld de sociologie worden intermenselijke relaties gerepresenteerd als 'grafen' en in bijvoorbeeld natuurkunde wordt het begrip 'afgeleide' als maat voor verandering geïntroduceerd. In het vertalen van begrippen naar meetbare grootheden (buren in een graaf, snelheid bij verplaatsing) bedrijft men ook wiskunde. Relaties geven uitdrukking aan ordening of aan een functioneel verband. Dat kan een ongelijkheid zijn, een algebraïsche vergelijking, een differentiaalvergelijking, … Het geheel van gekozen grootheden en opgestelde relaties vormt het wiskundig model van de (benadering van de) werkelijkheid.
Dit modelleerproces kan op elk niveau, afhankelijk van het leerjaar, gestalte krijgen. De concretisering van het abstractieniveau en het manipuleren met parameters zijn daarbij bepalend. In hoeverre het model de werkelijkheid benadert is afhankelijk van de selectie van grootheden en relaties. Een complexer model zal meer wiskunde-achtergrond vereisen, zowel voor het formuleren van het model, de analyse van het model, als ook voor de interpretatie van het resultaat van het onderzoek in het model.

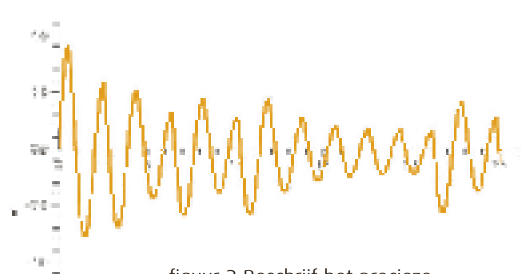
Modules

Het domein Wiskunde in Wetenschap heeft binnen Wiskunde D (vwo) een studielast van 80 uren. Wij werken eraan om dit domein te laten bestaan uit modules die in opeenvolgende leerjaren kunnen worden ingezet. Tevens is het studiemateriaal (deels) inzetbaar bij het vak NLT. Eén module staat bij ons voor 20 studielasturen. De kerngroep werkt aan verschillende modules die in combinatie het domein Wiskunde in Wetenschap kunnen opvullen. Ook aan de universiteiten van Amsterdam, Delft, Eindhoven en Nijmegen worden modules Wiskunde in Wetenschap ontwikkeld. Voor klas 4 wordt een algemene inleidende module 'Modelleren' geschreven met eenvoudige voorbeelden uit diverse wetenschapsgebieden. We willen ernaar streven dat deze module ook aantrekkelijk zal zijn voor leerlingen van andere dan het N&T-profiel. Daarnaast ontwikkelt de groep specifiekere modules met een bepaald thema (kilometerheffing, tsunami's, resonantie, planeetbewegingen) voor klas 5 en 6 waaraan een onderzoeksopdracht aan de universiteit of eventueel op afstand kan worden gekoppeld. De door de kerngroep ontwikkelde modules bestaan uit leerlingmateriaal *(zie figuur 1 en figuur 2)* en docentmateriaal.

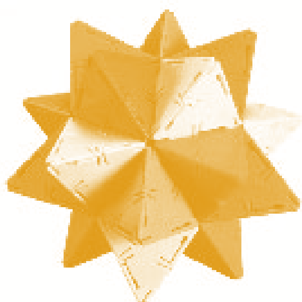


figuur 1 Schaalmodel (Märklin) van een locomotief. Neem aan dat deze locomotief met een snelheid van 60 km/u rijdt. Hoe snel moet je het schaalmodel laten rijden om het 'echt' te laten lijken?





figuur 2 Beschrijf het precieze verband tussen de figuur en de grafiek.



Het idee is dat leerlingen open opdrachten krijgen, kort en helder geformuleerd. De docenten echter zullen voorzien worden van een uitgebreide bundel met theoretische achtergrondartikelen en praktische tips: computersimulaties, applets, etc.
Theoretisch berust deze aanpak op een constructivistische visie op leren en onderwijzen. Concreet betekent dit dat het leren plaatsvindt vanuit probleem-georiënteerde activiteiten in een rijke leeromgeving – leerlingen kennen de weg naar allerlei hulpmiddelen. Het coöperatief (groeps)leren neemt een centrale plaats in, sámen wordt er aan problemen gewerkt.

Didactiek
Bij dit type leren hoort een daaraan aangepaste didactiek en een andere rol van de docent. De module zoals wij die voor ogen hebben is niet vergelijkbaar met een hoofdstuk uit één van de gebruikelijke wiskundemethodes. Wij ontwikkelen geen stapelopgaven in steeds veranderende contexten. We gaan uit van één rijke context, en willen het denken van leerlingen stimuleren door niet van deze ene context af te wijken. Het leerproces wordt niet gestuurd door de opgaven in het boek, maar door vragen die leerlingen zélf stellen. Dat gaat niet vanzelf, omdat leerlingen niet gewend zijn op deze manier met wiskunde bezig te zijn. Dit kan bijvoorbeeld door het houden van onderwijsleergesprekken waarin de docent de tijd neemt om door te vragen, eigen voorbeelden te laten bedenken, etc.
De docent treedt dan op als meester en de leerling is zijn gezel; in de literatuur wordt wel gesproken over cognitive apprenticeship (de docent als voorbeeld).
Eén van die rijke contexten waarvoor wij hebben gekozen is de context 'golven'. Motivatie is waarschijnlijk geen probleem (zie *www.wldelft.nl/gen/news/tsunami/*). Die mooie applet uit Delft gaat over golven en over het enorme bereik van golven. Het onderwerp is levensecht waardoor de kans groter is dat het geleerde ook beklijft; in de literatuur heet dat *situated cognition* (de docent geeft hints, stelt vragen, en biedt mogelijkheden aan om een volgende stap te zetten).
Maar wat moet je nu met zo'n rijke context in de wiskundeles? Hoe kun je daar nu een model van maken? Om maar met de deur in huis te vallen: wat is een golf eigenlijk? Hoe stel je dat voor? Je kunt een golf observeren als je naar de zee kijkt, maar wat gebeurt er eigenlijk en hoe beschrijf je dat?

Iedereen (nemen we aan) heeft wel eens in een stadion, of op tv, naar wedstrijden gekeken. Vaak wordt er hard geschreeuwd om de sporters extra op te jutten. Het effect is het grootst als je rechtop gaat staan met je armen recht omhoog gericht, precies op het moment dat de sporter voorbij komt. En dan gebeurt het: er ontstaat een golf (wave) beginnend bij de start (staande mensen) en eindigend bij de finish (staande mensen).
Neem nu eens aan dat de toeschouwers gaan staan om te schreeuwen en 2 seconden later weer zitten.
Als de toeschouwers op de tribune reageren op de naaste linkerbuur met een reactietijd van ½ seconde, dan verplaatst de golf zich in 1 seconde 80 cm, ervan uitgaande dat de stoelen op de tribune 40 cm breed zijn en direct aansluiten. Met andere woorden, de *golfsnelheid* is 80 cm (2 stoelen) per seconde. En als elke toeschouwer op de tribune reageert op de linkerbuur van de linkerbuur, dan verdubbelt (4 stoelen per seconde) de golfsnelheid. De golf verplaatst zich meer dan 1½ meter per seconde. Als de toeschouwers ook nog eens 2 seconden blijven staan, dan is de lengte van de golf meer dan 3 meter (8 stoelen). Anders gezegd: de *golflengte* is 3,20 meter (8 stoelen), en in het voorgaande geval 1,60 meter (4 stoelen). In dit voorbeeld zien we al dat, wil je tot een model komen, er veel vragen moeten worden gesteld en veel aannames moeten worden gedaan. Ook moeten de definities helder worden: wat versta je bijvoorbeeld precies onder een golflengte?
Voortbordurend op dit kernconcept kunnen allerlei nieuwe vragen ontstaan: Oudere mensen reageren trager, wat verandert er dan aan de golf? Kinderen reageren sneller maar blijven langer staan, wat verandert er dan? Hoe kun je aan een golf zien of mensen sneller opstaan of sneller gaan zitten, bijvoorbeeld vanaf het punt dat de handen helemaal in de hoogte zijn? Hoe lang duurt het in het Thialf Stadion voordat de golf helemaal rond is? Gaat de golf voor mensen hoog boven in de tribune (meer stoelen) langzamer dan voor mensen die beneden (minder stoelen) zitten? Wat gebeurt er als iemand (niet op de voorste rij) niet op zijn naaste buur, maar op diegene die schuin voor hem zit, reageert?

Deze aanpak kost tijd, maar het kern-concept krijgt langzaam maar zeker body. Een dergelijke context kan ook worden gespeeld, of via eigen verhalen bijna realiteit worden, in de literatuur aangeduid met *anchored instruction*: leerlingen worden voorzien van 'ankers'; de docent begeleidt zijn leerlingen met vragen en opmerkingen zoals: Denk je dat je aanname klopt? Hoe kom je daarachter? Waarom probeer je dit idee niet eens uit?

Abstractie, de stap naar een omschrijving waarin twee variabelen (afstand en tijd) voorkomen, komt dan niet zomaar uit de lucht vallen. Dit is een voorbeeld maar de essentie is duidelijk: denk met de leerlingen na over het kernconcept zelf. Voor docenten is dit nieuw, samen met leerlingen stellen zij zichzelf vragen en zoeken naar antwoorden, de literatuur spreekt dan over *reciprocal teaching.*
Deze andere didactiek vereist behalve lesmateriaal voor leerlingen ook materiaal voor docenten. Wij zijn van plan een uitgebreide docentenhandleiding te ontwerpen, met allerlei literatuurverwijzingen, websites met applets, en dwarsverbanden naar andere concepten.
We verwachten dat er aan het eind van dit schooljaar lesmateriaal en een bijbehorende docentenhandleiding gereed zullen zijn voor experimenteel gebruik.

Over de auteurs
De UT-kerngroep bestaat uit vier UT-docenten:
- Brenny van Groesen, *groesen@math.utwente.nl*,
- Gerard Jeurnink, *g.a.m.jeurnink@utwente.nl*
- Norbert Ligterink, *n.e.ligterink@utwente.nl*
- Nellie Verhoef, *n.c.verhoef@utwente.nl*

en zeven vwo-docenten:
- Jan de Geus, *j.degeus@baudartius.nl*
- Art Groen, *artjos@home.nl*
- Jan Otto Kranenborg, *j.o.kranenborg@hetnet.nl*
- Jeroen Spandaw, *j.g.spandaw@xs4all.nl*
- Frits Spijkers, *f.spijkers@math4all.nl*
- Gerard Stroomer, *g.stroomer@liemerscollege.nl*
- Joke Zwarteveen, *jzwarteveen@nuborgh.nl*

Een vernieuwd statistiekprogramma

Deel 1: Statistiek leren met 'data-analyse'

[Anne van Streun, Carel van de Giessen]

Probleemstelling

Sinds de invoering van het vak statistiek en kansrekening in het havo- en vwo-programma, omstreeks 1970, rust het schoolvak op twee heel verschillende pijlers. De ene poot is het rekenen met kansen, wat in de schoolcontext leidt tot allerlei uitdagende probleempjes en puzzels met nu en dan een uitloop naar een streng mathematische grondslag van de waarschijnlijkheidsrekening. De andere poot is de statistiek, zoals die overal in het dagelijks leven en bij alle economische, medische en sociale toepassingen wordt gebruikt en misbruikt. In de toegepaste wetenschappen, het maatschappelijke leven en beroepsleven gaat het bij de statistiek voornamelijk om het verzamelen van data en het proberen verstandige conclusies te trekken uit die data. De empirisch verkregen verdelingen staan centraal en begrippen als regressie en correlatie zijn noodzakelijk voor het bestuderen van de samenhang tussen twee variabelen. Het toeval speelt een essentiële rol bij het trekken van conclusies op basis van gegevens verkregen uit steekproeven.
De legitimering van de gehele statistieklijn, die uitmondt in het statistiekprogramma van wiskunde A havo-vwo (en binnenkort van wiskunde C vwo), is de maatschappelijke relevantie van de statistiek in de economische, sociale, psychologische, medische en algemeen maatschappelijke opleidingen en beroepsgebieden. Geen enkel ander deelgebied van de wiskunde wordt in onze maatschappij zo veelvuldig toegepast als de statistiek, het verzamelen, ordenen, vergelijken en conclusies trekken uit datasets. Een statistiekprogramma in het vernieuwde programma voor wiskunde A zal zich vanaf het eerste begin moeten richten op het redeneren met datasets.
Met dit uitgangspunt voor ogen lijkt de conclusie dat de opbouw van het statistiekcurriculum, de gehele leerlijn voor de statistiek, sterk zal moeten verschillen van de huidige opzet in de schoolboeken. Zo komen we tot onze probleemstelling:
Wat is een optimale leerlijn voor een statistiekprogramma, waarvan de eindtermen goed aansluiten bij het gebruik van de statistiek in vervolgopleidingen, de beroepspraktijk en de maatschappij?

Achtergrondliteratuur

In het domein van de statistiek worden in de literatuur de *onderzoeksvaardigheden (Weten hoe;* Van Streun, 2001) centraal gesteld. Statistiekonderwijs richt zich op het leren redeneren met statistische begrippen en het geven van betekenis aan statistische informatie. Dat omvat het interpreteren van datasets, van representaties van data en van statistische samenvattingen van data. Veel vormen van statistische redeneringen combineren ideeën over data en kans, wat leidt tot het trekken van conclusies (met onzekerheid) en het interpreteren van statistische resultaten. Aan de basis van dit redeneren liggen kernbegrippen ten grondslag als verdeling, centrummaat, spreiding, samenhang, onzekerheid, toeval en steekproef.
Garfield & Gal (1999) onderscheiden de volgende subdoelen voor statistiekonderwijs:

- Het begrijpen van het doel en de logica van statistische onderzoeken.
- Het begrijpen van het proces van statistische onderzoeken.
- Het beheersen van procedurele vaardigheden.
- Het begrijpen van de onderliggende wiskundige relaties.
- Het begrijpen van de begrippen toeval en kans.
- Het interpreteren en kritisch beoordelen van uitkomsten.
- Het argumenteren op basis van statistische begrippen en methoden.

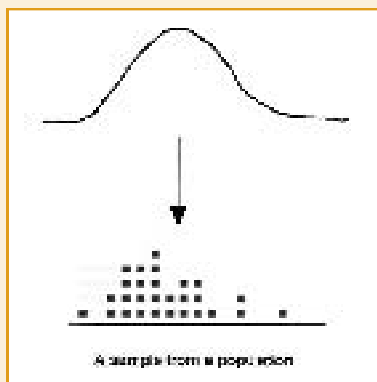
Onderwijskundig onderzoek uit de laatste decennia heeft duidelijk gemaakt dat de nadruk op het berekenen van statistische maten en toetsingsgrootheden onvoldoende bijdraagt aan het bereiken van de hiervoor geformuleerde doelen. Zo werd in empirisch onderzoek van Pollatsek, Lima & Well (1981) duidelijk dat het leren berekenen van een gemiddelde of mediaan weinig zegt over het *begrijpen* van het onderliggende basisconcept. Mokros & Russell (1995) maken onderscheid tussen leerlingen die vanuit het begrip redeneren en anderen die vooral aan het rekenen blijven. Delmas & Liu (2005) onderzochten het begrip van leerlingen aan wie de standaarddeviatie was onderwezen. De meeste leerlingen pasten een regelgestuurde benadering toe om verdelingen te vergelijken in plaats van te redeneren op basis van het begrijpen van de standaarddeviatie. Met inzet van ontwikkelde software deden de onderzoekers een poging om leerlingen meer en beter statistische redeneringen te laten geven. Konold & Pollatsek (2002) wijzen erop dat veel leerlingen uiteindelijk wel in staat zijn om gemiddelden en medianen uit te rekenen, maar dat zij er geen notie van hebben hoe ze die kunnen *toepassen* en *interpreteren*. Een deel van het probleem ligt in het feit dat dergelijke samenvattende maten wel worden gebruikt als typische

scores voor een verzameling gegevens, maar dat zij een magere conceptuele basis vormen voor het representeren van de gehele groep, bijvoorbeeld in het vergelijken met andere groepen. Voor het *interpreteren* van de verzamelde data is kennis over de context van het statistisch onderzoek eveneens van belang. Kunnen we de data beschouwen als behorende tot een steekproef uit een statische, welomschreven populatie, zodat wij op basis van het steekproefresultaat een schatting kunnen geven van de verdeling van de variabele in de populatie? Zie ***figuur 1***. Of moeten we de data opvatten als afkomstig uit een dynamisch veranderende populatie met interactie tussen tal van variabelen, waardoor elk resultaat kan zijn beïnvloed door tal van factoren die we niet hebben onderzocht? Zie ***figuur 2***.

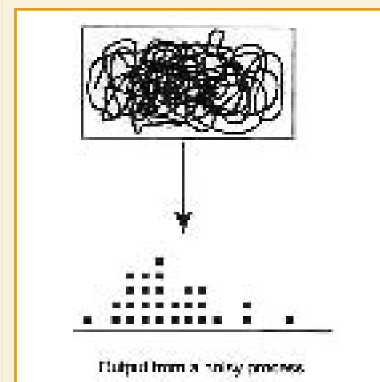
In steeds meer onderzoeken op dit gebied wordt onderwijs ontworpen met inzet van geschikt gemaakte software, waardoor vanzelf de aandacht van het berekenen verschuift naar het redeneren. McClain & Cobb (2001) hebben onderwijs ontworpen waarin leerlingen door opdrachten en het gebruik van software actief aan het werk gaan met het verzamelen en interpreteren van data in betekenisvolle contexten. Zij concentreerden zich in hun onderzoek op het redeneren met de ‘big ideas’ van de statistiek, waarin het concept van *verdeling* als de karakteristiek van een dataverzameling centraal staat. Centrum- en spreidingsmaten, scheefheid, relatieve frequentie e.d. worden als kenmerken van een verdeling geïntroduceerd. Zie ***figuur 3*** en ***figuur 4***.

Hierbij maakten de leerlingen gebruik van de computer voor het analyseren van data, maar ook werd de computer ingezet voor het ondersteunen van het denken met wiskundige begrippen. Het doel was het ontwikkelen van het logisch redeneren over manieren om gegevens te structureren teneinde een conclusie te kunnen trekken. Het onderzoek richtte zich op het redeneren van de leerlingen binnen één dataset en op het vergelijken van twee dataverzamelingen. De onderzoekers rapporteren dat de leerlingen regelmatig in discussie gingen over de aanpak, de geschiktheid van de te kiezen statistische maten en de zinvolheid van conclusies in het licht van de contexten.

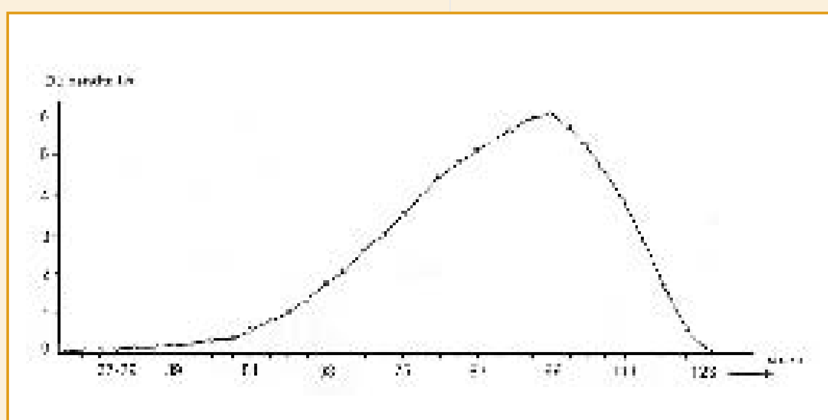
Bakker & Gravemeijer (2003) en Bakker



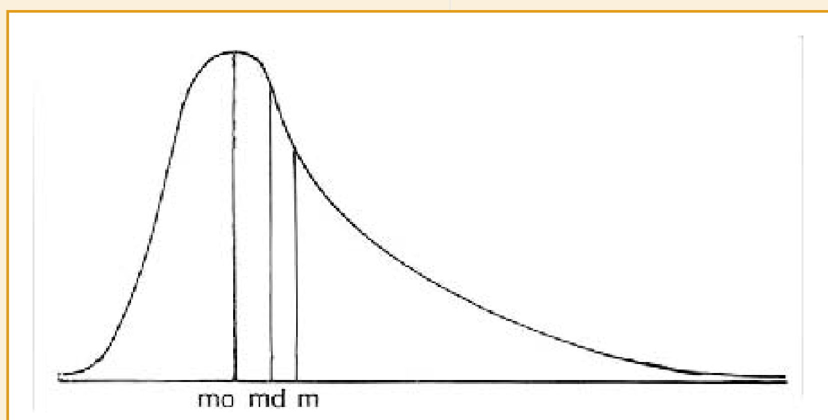
figuur 1 Een steekproef uit een statische populatie



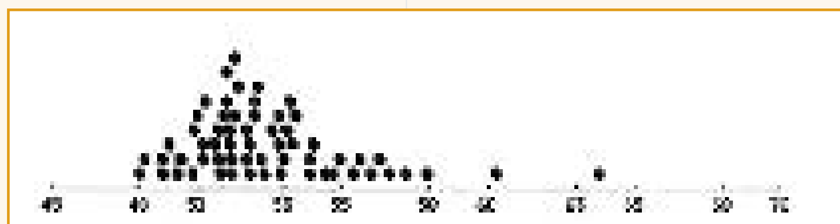
figuur 2 Een steekproef uit een dynamisch veranderende populatie



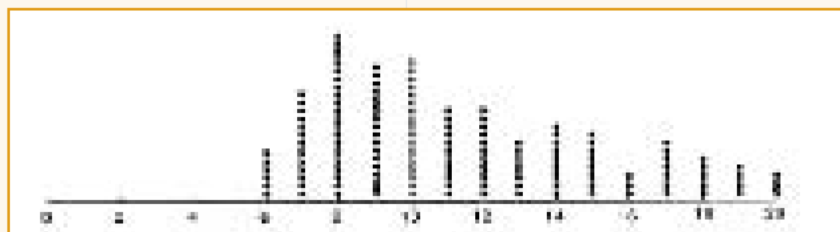
figuur 3 Rechtsscheve verdeling



figuur 4 Linksscheve verdeling



figuur 5 Dotplot



figuur 6 Overgang naar een histogram

(2004) maakten voor het aanvangsonderwijs in de statistiek (brugklas) gebruik van statistische software in het stimuleren van het redeneren van leerlingen over verdelingen. Gegevens worden eerst gevisualiseerd met horizontale staafjes, later door punten (dotplot; zie ***figuur 5***). Het voordeel van een dotplot is dat de individuele data nog te zien zijn. Daarna wordt geleidelijk (zie ***figuur 6***) het histogram heruitgevonden.

Chance (2002) betoogt op grond van haar analyse van uitgevoerde onderzoeken, dat leerlingen statistische onderzoeksvaardigheden moeten leren aan de hand van hun *eigen* onderzoekjes en *eigen* data. Leerlingen gaan de moeilijkheden van het echt verzamelen van gegevens inzien, wat de weg opent voor een bestudering van meetschalen en variabiliteit. Het overdenken van de gestelde vraag, het op waarde inschatten van andere variabelen, het zorgvuldig plannen van het verzamelen van data, dat staat aan het begin van het leren uitvoeren van een statistisch onderzoekje. Leerlingen worden eigenaar van hun onderzoek en raken sterk betrokken bij de uitvoering van hun opdracht.

Statistiek leren met 'data-analyse'

Voor een praktische invulling van het onderwerp statistiek kan gedacht worden aan een domein Data-analyse. Dankzij ict is een andere benadering van het leren van statistiek mogelijk. Niet meer weinig betekenisvolle voorbeelden die beperkt zijn tot een enkele variabele en een handvol waarden, die je met het blote oog kunt evalueren. Maar een benadering die gebruik maakt van betekenisvolle datasets, met meerdere variabelen en grote aantallen records. Statistisch gereedschap is nodig als je in het databos de bomen en paden niet meer ziet, en dat is heel snel het geval.

In het Engelstalige gebied wordt wel de naam *Exploratory data analysis* gebruikt, in het Duitstalige gebied *Explorative Daten Analyse*, beide een mond vol en daarom wel afgekort tot EDA. EDA is een ontdekkingsreis door realistische data die de kennis en het inzicht in de statistische werktuigen verdiept. De analyse van data is niet beperkt tot wiskunde, maar is voor vele andere vakken van belang. Data-analyse is in feite een vakoverstijgend thema, de kunst om de data te laten spreken, om patronen in data te ontdekken die tevoren niet verwacht werden. Ook in zorgvuldig geplande onderzoeken zal het verkennen van de data een eerste en essentiële stap zijn.

Tukey, de grondlegger van de EDA en bekend als bedenker van onder andere de boxplot, gebruikt de metafoor van de detective. Uitgaande van een reële probleemsituatie worden sporen gezocht, bijzonderheden ontdekt en hypothesen ontwikkeld. Op basis van zelf verzamelde data of andere realistische data proberen leerlingen vragen te beantwoorden of een hypothese te accepteren of verwerpen.

Om data zinvol en nuttig te kunnen gebruiken moet je ze samenballen, samenvatten en overzichtelijk weergeven. Reken- en tekentechnieken, die vroeger alle aandacht opeisten, hoeven tegenwoordig geen tijdrovende rol meer te spelen. Andere methoden en strategieën worden bruikbaar om data te onderzoeken, zaken die erin verborgen liggen aan het licht te brengen, structuren te ontdekken en data te interpreteren. Op zich kunnen grafieken en diagrammen al object van het onderzoek en middel tot communicatie zijn. Ze dienen niet alleen maar om een resultaat te presenteren. In grafische representaties is namelijk veel structuur en bijzonderheid te ontdekken.

Naast het organiseren van ruwe data door ordenen en groeperen kunnen ook relaties tussen variabelen onderzocht worden, bijvoorbeeld met puntenwolken (regressiediagrammen).

Correlatietechnieken liggen voor de hand om de relaties te kwantificeren. Het bewerken van data door het uitvoeren van rekenmethoden, opsplitsing, filtering en transformatie brengt onderliggende en niet direct zichtbare informatie naar boven. Het gebruik van realistische data voorkomt ook dat te snel theoretische modellen de overhand krijgen. Data, dus statistiek, vormen vaak de basisinformatie die nodig is bij het beoordelen van risico's en het nemen van beslissingen. De kwaliteit van de data en de gehanteerde methodieken en redeneringen kunnen van groot belang zijn.

Data-analyse vormt ook een raakvlak van statistiek en kansrekening. Steekproeven, betrouwbaarheid, hypothese toetsen, voorwaardelijkheid, Bayesiaanse statistiek zijn voor de hand liggende onderwerpen bij het werken met data.

Naast het gebruik van bestaande datasets kunnen leerlingen ook zelf data verzamelen of genereren, bijvoorbeeld door metingen uit te voeren. Waar dat in de bestaande schoolpraktijk gebeurt blijft het bij een oppervlakkige presentatie waarbij niet dieper wordt ingegaan op het verzamelde materiaal.

Statistiek wordt levend(ig) door experimenten en simulaties. Eigen experimenten kunnen er toe bijdragen om de begrippen, het nut en mogelijkheden, maar ook de beperkingen van statistische

methoden te leren. Experimentele methoden kunnen betekenis hebben als didactische instap, om rond een vraagstelling iets uit te gaan zoeken wat je anders niet kunt uitzoeken en bij de ontwikkeling van theorie. Onderwijs in statistiek met (exploratieve) data-analyse maakt de omgang met data motiverend en spannend, legt nadruk op de inzet van wiskunde bij interpretatie en begripsvorming en biedt de mogelijkheid tot het ontwikkelen van theorie.

Uitgangspunten voor een vernieuwde leerlijn statistiek

Het valt moeilijk te ontkennen dat de statistiek voor de algemene vorming van een burger in ons land het meest relevante deel van de wiskunde is, terwijl het aantal studenten dat in hbo en wo statistiek in de opleiding of later in het beroep moet gebruiken of begrijpen, veel en veel groter is dan het aantal studenten dat nog iets doet met differentiaalrekening. Dat pleit ervoor om de beschrijvende statistiek ook in de onderbouw havo-vwo een veel belangrijker plaats te geven. In de onderbouw kan een veel solider fundament worden gelegd voor de statistieklijn in wiskunde A, dan nu het geval is. In de lijn van de genoemde onderzoeken en veel recente studieboeken van hbo en wo ligt het vervolgens voor de hand om zowel in havo als in vwo ruim werk te maken van het exploreren van datasets, het leren redeneren met karakteristieken van verdelingen, het vergelijken van verdelingen, de samenhang tussen twee variabelen en ter afsluiting van dit domein het werken met correlatie en regressie.
In de eindtermen van dit deel van een statistiekprogramma zal een stevig accent moeten worden gelegd op het interpreteren van resultaten van statistisch onderzoek, inclusief de problematiek van het aselect trekken of representatief samenstellen van een steekproef. Het zelf leren verzamelen van data in praktische opdrachten vormt een mooie context voor het verwerven van inzicht in die problematiek.
Voor de havo lijkt het geschetste statistiekprogramma meer dan voldoende om een basis te kunnen leggen voor het vervolgonderwijs. Het vwo-programma vervolgt dan met de normale verdeling, de normale benadering, verwachtingswaarde en het toetsen van hypothesen, waarbij veel aandacht moet worden besteed aan de onderliggende modelveronderstellingen bij de keuze van een toets. Op die manier kan een samenhangend statistiekcurriculum worden gedefinieerd dat voldoende maatschappelijke relevantie heeft en goed aansluit op het gebruik van de statistiek in de diverse toepassingsgebieden.

In het volgende nummer van Euclides werken we exemplarisch deze uitgangspunten uit in een leerlijn voor een statistiekprogramma, waarin de noodzakelijke statistische begrippen en methoden worden opgebouwd tijdens het leren analyseren van datasets.

Literatuur

- A. Bakker (2004): *Design research in statistics education: On symbolizing and computer tools*. Utrecht: CD-ß Press (proefschrift).
- A. Bakker, K.P.E. Gravemeijer (2002): *Leren redeneren over statistische verdelingen; een ontwikkelingsonderzoek*. In: *Tijdschrift voor Didactiek der ß-Wetenschappen*, 19(1-2), pp. 21-39.
- B.L. Chance (2002): *Components of Statistical Thinking and Implications for Instruction and Assessment*. In: *Journal of Statistics Education*, 10(3), pp. 1-18.
- R.C. Delmas, Y. Liu (2005): *Exploring Students' Conceptions of the Standard Deviation*. In: *Statistics Education Research Journal*, 4(1), pp. 55-82.
- J.B. Garfield, I. Gal (1999): *Teaching and Assessing Staticical Reasoning*. In: *Developing Mathematical Reasoning*. NCTM, 1999 Yearbook.
- C. Konold, A. Pollatsek (2002): *Data analysis as the search for signals in noisy processes.*In: *Journal for Research in Mathematics Education,* 33(4), pp. 259-289.
- J. Mokros, S.J. Russell (1995): *Children's concepts of* average *and representatives.* In: *Journal for Research in Mathematics Education*, 26(1), pp. 20-39.
- A. Pollatsek, S. Lima, A.D. Well (1981): *Concept or computation: Students' under standing of the mean.* In: *Educational Studies in Mathematics*, 12(2), pp. 191-204.
- A. van Streun (2001): *Het Denken Bevorderen*. Groningen: RuG (rede bij de aanvaarding van het ambt van hoogleraar in de didactiek van de Wiskunde en Natuurwetenschappen).

Over de auteurs

Carel van de Giessen en Anne van Streun zijn leden van cTWO en van de programmacommissie die de eindtermen voor wiskunde A en C gaat voorstellen.
Carel van de Giessen is wiskundeleraar vanaf 1969 en sinds januari 2006 gepensioneerd. Hij is auteur van de methode Moderne Wiskunde en houdt zich momenteel bezig met zinvolle toepassingen van ict in het wiskundeonderwijs.
E-mailadres: *carelvdg@planet.nl*
Anne van Streun is wiskundeleraar sinds 1964, wiskundedidacticus aan de Rijksuniversiteit Groningen sinds 1974, hoogleraar didactiek bètawetenschappen sinds 2000 en sinds mei 2006 gepensioneerd.
E-mailadres: *avstreun@euronet.nl*

Ostrowskiprijs voor Green en Tao

[Rob Tijdeman]

Op 12 april a.s. wordt tijdens het Nederlands Mathematisch Congres in Leiden de Ostrowskiprijs 2005 uitgereikt aan Green en Tao voor hun onderzoek van priemgetallen.
Zo'n mededeling roept verschillende vragen op: Wat houdt een wiskundeprijs in? Wat is de Ostrowskiprijs? Wie zijn Green en Tao? Welke resultaten hebben ze bewezen? En misschien ook: Wat is het Nederlands Mathematisch Congres? Wat is een priemgetal? Op al deze vragen wil ik in dit artikel antwoord geven.



Ben Green



Terence Tao

Wiskundeprijzen

De bekendste prijs voor wetenschappelijk onderzoek is de Nobelprijs. Er zijn wel Nobelprijzen voor natuurkunde, scheikunde, economie, maar niet voor wiskunde. Als een equivalent daarvoor is enkele jaren geleden de *Abelprijs* ingesteld. Deze prijs ter grootte van 750.000 euro wordt jaarlijks toegekend aan een of twee wiskundigen, dit jaar voor de vierde keer. Serre (2003), Atiyah en Singer (2004), Lax (2005) en Carleson (2006) zijn de eerste ontvangers van de prijs die gegeven wordt voor het hele oeuvre. Er zijn nog andere vergelijkbare prijzen, zoals de Israëlische *Wolfprijs* en de Midden-Europese *Balzanprijs*.

Een heel ander soort prijs is de *Clay prize*. Het Clay Instituut in Boston heeft een miljoen dollar uitgeloofd voor de oplossing van elk van zeven fundamentele problemen in de wiskunde zoals het bewijzen van de Riemann-hypothese en van het Poincaré-vermoeden. Volgens de kenners is dat laatste probleem recentelijk opgelost door de Rus Perelman. Het is waarschijnlijk dat hij binnenkort als eerste zo'n Clayprijs in ontvangst mag nemen. Of hij dat dan zal doen is een open vraag gezien zijn weigering de Fields Medal te accepteren.

De tot voor kort meest prestigieuze wiskundeprijzen, de genoemde *Fieldsmedailles*, hebben een heel ander karakter. Tijdens het Internationaal Congres van Wiskundigen, dat om de vier jaar wordt gehouden, worden maximaal vier wiskundigen niet ouder dan veertig jaar bekroond voor hun werk. De laatste keer, in 2006 in Madrid, werden Fieldsmedailles toegekend aan Okounkov, Perelman, Tao en Werner. Van hen kreeg de reeds eerder genoemde Perelman verreweg de meeste publiciteit, omdat hij de prijs van ruim tienduizend euro weigerde.
De Fieldsmedailles worden toegekend door de International Mathematical Union die inmiddels ook enkele andere prijzen heeft ingesteld. Ook de European Mathematical Union verleent op haar vierjaarlijks congres aanmoedigingsprijzen aan jonge wiskundigen. Op het eerstvolgend congres, in Amsterdam in 2008, zullen *'Compositio-prijzen'* van 5000 euro elk gegeven worden aan de beste tien Europese wiskundigen onder de 35 jaar. Binnenkort kunnen kandidaten genomineerd worden.
Het Koninklijk Wiskundig Genootschap kent geen eigen prijzen. Wel worden vaak tijdens zijn jaarlijkse congres prijzen uit andere bron toegekend. Dit jaar gebeurt dat dus met de Ostrowskiprijs.

De *Ostrowskiprijs* heeft weer een heel ander karakter. Hij wordt verleend voor 'de beste prestatie op het gebied van de zuivere wiskunde en de theoretische aspecten van de numerieke wiskunde in de laatste vijf jaar'. Ostrowski werd geboren in 1893 in Kiev, kwam naar Duitsland voor zijn verdere studie en promotie, werd later hoogleraar aan de Universiteit van Bazel en overleed in 1986. Hij heeft belangrijk werk gedaan op het gebied van de getaltheorie en de analyse. Zo legde hij de grondslag voor de theorie van de p-adische getallen. Hij en zijn (rijke) vrouw bepaalden in hun testament de regels voor de prijs. De tweejaarlijkse prijs, 100.000 Zwitserse franken groot, wordt toegekend door een jury bestaande uit hoogleraren verbonden aan de universiteiten van Bazel, Jeruzalem en Waterloo (Canada) en leden van de Academies van Wetenschappen van Denemarken en Nederland, waarbij het voorzitterschap rouleert. Waarom de jury zo samengesteld is, is niet bekend. Tot de eerdere prijswinnaars behoort Andrew Wiles, voor zijn bewijs van de Laatste Stelling van Fermat; hij was net ouder dan veertig jaar toen hij zijn artikel publiceerde, en kwam dus niet meer in aanmerking voor een Fieldsmedaille.
De Ostrowskiprijs 2005 is toegekend aan Ben Green (Cambridge, Engeland) en Fieldsmedaille-winnaar Terence Tao (Los Angeles, V.S.) voor hun gezamenlijke resultaten over de verdeling van priemgetallen. De uitreiking zal plaatsvinden op donderdag 12 april om 17.30 uur in het voormalige Kamerlingh Onnes Laboratorium in Leiden.

Ben Green
Ben Green werd geboren in 1977 en behaalde zijn bachelordiploma in Cambridge in 1998. Hij ging daarna een jaar studeren aan de Universiteit van Princeton, waar hij waarschijnlijk Terence Tao heeft ontmoet. Hij keerde weer terug naar Cambridge om onder leiding van Fieldsmedaille-winnaar Tim Gowers een proefschrift te schrijven. Na zijn promotie in 2002 verbleef hij enkele maanden in Budapest, een jaar in Vancouver, en verder in Cambridge, tot hij begin 2005 benoemd werd tot hoogleraar in Bristol. Sinds september 2006 is hij Herchel Smith Professor in Cambridge. Greens interessegebieden zijn analyse, combinatoriek en getaltheorie, speciaal priemgetallen. Hij heeft 29 publicaties op zijn naam, waarvan acht gezamenlijk met Tao.

Terence Tao
Terence Tao is een wiskundige van wie ik me afvraag hoe het mogelijk is dat een mens dat kan. Hij werd geboren in Australië in 1975 en is dus nog maar 31 jaar oud. Hij deed in 1986-88 mee aan de Internationale Wiskunde Olympiade en won achtereenvolgens een bronzen, een zilveren en een gouden medaille. In 1992 haalde hij zijn Mastersdiploma en trok toen naar Princeton waar hij in 1996 promoveerde op een onderwerp uit de harmonische analyse. Daarna vertrok hij naar de University of California at Los Angeles waar hij na vier jaar tot Full Professor werd benoemd. Inmiddels heeft hij enkele boeken en ruim honderd artikelen geschreven en al vele prijzen gekregen, evenals een MacArthur Fellowship van een half miljoen dollar. Niettemin vindt hij nog tijd om colleges te geven, andere zaken te behartigen en een website voorbeeldig bij te houden; zie [1]. Indrukwekkend is naast de diepte ook de breedte van zijn werk. Centraal staat de harmonische analyse, operatorentheorie, maar Tao publiceert ook over partiële differentiaalvergelijkingen, getaltheorie, ergodentheorie, combinatoriek, besliskunde, symplectische meetkunde en relativiteitstheorie, deels als afzonderlijke projecten, maar deels ook door bruggen tussen vakgebieden te slaan en technieken van het ene vakgebied toe te passen in het andere.

Dat zijn werk niet alleen theoretisch interessant is, wordt bijvoorbeeld duidelijk uit een artikel uit USA Today; zie [2]. Tegenwoordig gebruiken digitale camera's miljoenen pixels om een goede foto te maken. Men is bezig camera's te ontwerpen die met slechts één pixel werken. Deze speciale techniek zorgt ervoor dat camera's met minder sensoren een hogere resolutie bereiken. Fundamenteel voor de toepassing van de techniek is een algoritme van Terence Tao en anderen om een origineel te reconstrueren uit een hoeveelheid gegevens die ogenschijnlijk veel te klein is om het beeld te definiëren.

Gezamenlijk werk van Green en Tao
Een priemgetal is een natuurlijk getal dat geen andere natuurlijke delers heeft dan 1 en het getal zelf. De kleinste priemgetallen zijn 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41, 43, 47. Al meer dan tweeduizend jaar geleden bewees Euclides dat er oneindig veel priemgetallen bestaan. De priemgetalstelling zegt dat het aantal priemgetallen tot een groot getal x bij benadering gelijk is aan $\frac{x}{\ln x}$. (We zeggen dat een rij groeiorde $f(x)$ heeft, als het aantal termen kleiner dan x ruwweg $f(x)$ is; de even getallen hebben dus groeiorde $\frac{x}{2}$, de kwadraten $\sqrt{x}$, en de priemgetallen $\frac{x}{\ln x}$.) Ter vergelijking, nemen we voor x tien miljard, dan geeft de formule $\frac{x}{\ln x}$ als schatting voor het aantal priemgetallen tot x het aantal 434.194.481 terwijl het werkelijke aantal priemgetallen 455.052.511 bedraagt. Een nog betere schatting is de integraal van 2 tot x over de integrand $\frac{1}{\ln t}$. Die geeft voor $x = 10^{10}$ de schatting 455.055.615, een afwijking van slechts een duizendste procent.
Een gevolg van de nog onbewezen Riemann-hypothese is dat priemgetallen zich globaal gedragen als random getallen waarvoor de kans dat een getal n geselecteerd wordt, gelijk is aan $\frac{1}{\ln n}$. Met 'globaal gedragen als' bedoel ik hier dat op een groot interval zowel het verwachte aantal getallen als de spreiding van de opeenvolgende verschillen overeenkomen.

Terwijl priemgetallen globaal dus een regelmatig gedrag vertonen, is het lokale gedrag erg grillig. Het is nog steeds een open probleem of er oneindig veel priemgetaltweelingen bestaan, paren priemgetallen die 2 verschillen, zoals 5 en 7, en 41 en 43. Het is eenvoudig in te zien dat priemgetaldrielingen niet bestaan, op 3, 5, 7 na, omdat een van de drie getallen n, $n + 2$, $n + 4$ door 3 deelbaar is. Wel wordt vermoed dat er oneindig veel priemgetaldrietallen van de vorm n, $n + 2$, $n + 6$ en van de vorm n, $n + 4$, $n + 6$ bestaan. Er zijn soortgelijke vermoedens voor lokale structuren van meer dan drie priemgetallen en ook vermoedens die aangeven met welke frequentie zulke structuren naar verwachting voorkomen.

Een rekenkundige rij is een oplopende rij natuurlijke getallen met constant verschil, zoals 11, 23, 35, 47, 59, 71 met verschil 12. Hoe lang kunnen rekenkundige rijen van louter priemgetallen zijn? Een voorbeeld is 5, 17, 29, 41, 53 van lengte 5. Het is nodig om een even verschil te nemen, omdat er anders even getallen in de rij voorkomen. Ook zal al snel één van de getallen deelbaar zijn door 3. Dat kunnen we vermijden door als verschil een veelvoud van 3 te nemen. Voor langere rekenkundige rijen moeten we natuurlijk ook oppassen voor veelvouden van 5 en 7. Een goede verschilkandidaat voor een wat langere rekenkundige rij van priemgetallen is daarom $2 \times 3 \times 5 \times 7 = 210$ en inderdaad vormt 199, 409, 619, 829, 1039, 1249, 1459, 1669, 1879, 2089 een rekenkundige rij van priemgetallen van lengte tien met verschil 210. De vraag ligt voor de hand of je nog langere rijen van priemgetallen kunt construeren. Hieraan is al heel wat afgerekend. Met behulp van krachtige computers zijn rekenkundige rijen van priemgetallen van lengte 23 (met verschil 9523×223092870) geconstrueerd, maar wiskundig zegt dat natuurlijk niet veel. Eigenlijk was alleen bekend dat er oneindig veel rekenkundige rijen van drie priemgetallen bestaan; dit werd in 1939 bewezen door onze landgenoot Van der Corput. Groot was de verrassing toen Green en Tao aankondigden dat ze konden bewijzen dat er oneindig veel rekenkundige rijen van priemgetallen van lengte vier bestaan en kort daarna zelfs dat er zulke priemgetalrijen van willekeurige lengte zijn! Het staat nu dus vast dat, welk natuurlijk getal n je ook in gedachten neemt, er een rekenkundige rij van priemgetallen van lengte n is. Overigens vertellen Green en Tao je niet hoe je zo'n rij kunt construeren. Voor hun stelling en de daarmee samenhangende theorie hebben ze

de Ostrowskiprijs gekregen.
Zo'n resultaat komt niet uit de lucht vallen. De gebruikte techniek borduurt voort op een ontwikkeling die al enkele tientallen jaren aan de gang is. Zoals gezegd hebben priemgetallen een groeiorde $\frac{x}{\ln x}$. Aanvankelijk keken wiskundigen naar rijen met een groeiorde *cx*, waarbij *c* een kleine constante is. Zulke rijen zijn dichter dan de rij van priemgetallen, omdat *cx* sneller naar oneindig gaat dan $\frac{x}{\ln x}$. De vraag was of zulke rijen altijd rekenkundige deelrijen van willekeurige lengte bevatten. Dit werd in 1975 bewezen door Szemeredi, waarmee hij een bekende stelling van Van der Waerden verfijnde. Szemeredi gebruikte een zeer ingewikkelde combinatorische redenering die aanvankelijk door niemand te volgen was. In 1977 gaf Furstenberg een meer doorzichtig bewijs van Szemeredis stelling, gebruik makend van ergodentheorie. In 1998 gebruikte Gowers ideeën uit de harmonische analyse om een theorie te ontwikkelen die verder gaat dan Szemeredis stelling. Hiervoor kreeg hij een Fieldsmedaille. Zoals gezegd was Gowers de promotor van Green. Greens proefschrift bevat al enige ingrediënten, maar het was de samenwerking met Tao die tot het onverwachte bewijs van rekenkundige rijen van priemgetallen van willekeurige lengte leidde. Inmiddels zijn Green en Tao bezig om een schatting voor het aantal rekenkundige rijen van priemgetallen van lengte *n* tot een gegeven grens af te leiden. Misschien bevat *elke* rij natuurlijke getallen met groeiorde $\frac{x}{\ln x}$ wel willekeurig lange rekenkundige deelrijen.

Tot slot

Het is een gelukkig toeval dat de Ostrowskiprijs-ceremonie dit keer in Nederland plaatsvindt en dat we daardoor een recente Fieldsmedaillewinnaar en een andere hoogbegaafde jonge wiskundige aan het werk kunnen zien. Ook leraren zijn hartelijk welkom om daarbij te zijn.
Ben Green zal op donderdag 12 april om 16.30 uur, dus direct voorafgaande aan de prijsuitreiking en ook in het voormalige Kamerlingh Onnes Laboratorium, Steenschuur 25, Leiden, een voordracht 'Long arithmetic progressions of primes' houden over het prijswinnende werk.
Terence Tao zal de slotlezing houden van het Nederlands Mathematisch Congres op vrijdag 13 april om 16.15 uur in het Collegezalengebouw, Einsteinweg 55. Zijn lezing is getiteld 'The uniformity principle and compressed sensing' en zal gaan over het eerder genoemde algoritme om beelden te reconstrueren. Tao schijnt een uitstekend spreker te zijn.

Voor meer informatie over het Nederlands Mathematisch Congres, wiskundeprijzen, Green en Tao, en priemgetallen is Google een handig hulpmiddel. Zoek echter niet naar de website van de Ostrowskiprijs, want die bestaat niet.

Noten

[1] *www.math.ucla.edu/~tao/*
[2] *www.usatodaycom/tech/science/columnist/2006-09-30-single-pixel_x.htm*

Over de auteur

Rob Tijdeman was voorzitter van de jury voor de Ostrowskiprijs 2005. Hij is als hoogleraar wiskunde verbonden aan de Universiteit Leiden, en verder o.a. directeur van de onderzoekschool Stieltjes Institute for Mathematics, waarin zes universitaire wiskunde-instituten samenwerken, en voorzitter van een landelijke visitatiecommissie voor het universitaire wiskundeonderwijs.
E-mailadres: *tijdeman@math.leidenuniv.nl*

Parate kennis en algebra

[Anne van Streun]

$$\frac{x^2-y^2}{x-y}=2$$

WISKUNDEDIDACTIEK ANNO 2010

Aflevering 3: Formules grafisch interpreteren

Oriëntatie

Een belangrijk aspect van het algebraïseren of van *symbol sense* is het grafisch kunnen interpreteren van een formule, vergelijking of functievoorschrift. We besteden daar in Nederland al decennia veel aandacht aan in het voortgezet onderwijs, en met de komst van prachtige grafische software zijn leerlingen zelf in staat om grafische kenmerken van verbanden of families van verbanden op te sporen en onder woorden te brengen. Dit lijkt wel het eenvoudigste aspect van algebraïseren, of niet?

Is er wel een probleem? Ja!

Niet iedereen lijkt ervan overtuigd dat onze huidige programma's te weinig bijdragen aan de ontwikkeling van *symbol sense*. Kijk eens naar enkele voorbeelden uit een zelftest voor eerstejaars studenten van de Technische Universiteit Delft (2004), gemaakt door ruim 1500 studenten. Vergeleken met het jaar daarvoor is die test door het gebruik maken van meerkeuze-antwoorden sterk vereenvoudigd en toch! Voorbeeld 1. Vereenvoudig $\frac{x^2-x}{x^2-2x+1}$. De helft van de studenten kiest het goede alternatief, 18% kiest voor $\frac{-x}{-2x+1}$ en 16% komt tot $\frac{1}{-x+1}$. Het klakkeloos wegstrepen uit teller en noemer, een bekende beginnersfout, verwacht je niet meer van leerlingen met vwo wiskunde B. Van deze leerlingen, de wiskundige top van ons vwo en door ons opgevoed met de grafische rekenmachine, mag je toch wel verwachten dat ze met één oogopslag zien dat bij een x-waarde die gaat naar oneindig de grafiek van de gegeven vorm naar $y = 1$ nadert. Wat de genoemde alternatieven meteen uitsluit. Voorbeeld 2. Los op $x^2 \geq 4x$, met een score van 36% voor $x \leq 0$ en $x \geq 4$, 30% voor $x \geq 4$, 6% voor $0 \leq x \leq 4$ en 22% voor het goede alternatief $x \leq 0$ of $x \geq 4$. Kennelijk leidt het gebruik van de grafische rekenmachine niet tot een snelle schets van de grafieken van het linkerlid en rechterlid van de ongelijkheid, wat de onjuistheid van de alternatieven onmiddellijk laat zien. Verbijsterend! De groeiende aantallen toetsen voor eerstejaars in het hoger onderwijs laten allemaal hetzelfde beeld zien. Niet alleen een basis aan algebraïsche technieken ontbreekt, maar ook een gevoel voor wat een formule kan voorstellen.

Hoe kon dit gebeuren? Wat doen we er aan?

Voordat de grafische rekenmachine in onze bovenbouw havo-vwo werd ingevoerd, hebben wij aan de Rijksuniversiteit Groningen een didactisch onderzoek in een aantal scholen uitgevoerd, waaruit onder andere naar voren kwam dat de inzet van de grafische rekenmachine met name de middelmatige en zwakkere leerlingen hielp om algebraïsche problemen beter te kunnen oplossen. De 'echte' B-leerlingen deden het liever algebraïsch, want dat ging bij ons type opgaven sneller. Wij werkten toen met de TI81, waarmee de leerlingen eerst een grafiek moesten tekenen en daarna met de cursor op stap moesten om snijpunten en dergelijke op te sporen. Dus een sterk grafische oplossingsmethode! De huidige geavanceerde versies van de GRM kunnen als een black box worden gebruikt en dat gebeurt dan ook. De leerling levert zich blind uit aan het apparaat! Het is wel duidelijk dat wij in ons onderwijs vanaf de onderbouw meer werk moeten maken van het handmatig schetsen van grafieken en het memoriseren van eigenschappen van standaardgrafieken en die kennis op paraatheid moeten toetsen. Bijvoorbeeld als volgt.

Lineaire verbanden, formules, vergelijkingen

Elke wiskundesectie kan snel een criteriumtoets maken waarin wordt getoetst of leerlingen aan het einde van leerjaar 2 vlot en foutloos lineaire formules grafisch kunnen interpreteren. Snijpunten met de assen en een schets van de lijn met een plaatje van de helling moeten bij elke

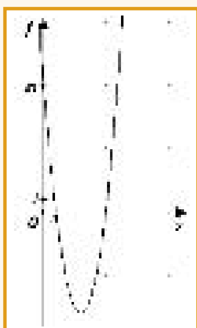
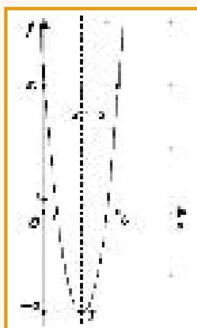
formulevorm vlot kunnen worden geproduceerd. Niet 90% goed? Dan (zelfstandig en individueel) laten werken aan automatiseren en de toets herhalen. Totdat het criterium wordt gehaald!

- Formules met allerlei letters en vormen zoals:
$y=5x,\ y=\frac{x}{5},\ y=5-x,\ y=5x+3,\ y=5(x+3),\ x+y=20,\ \frac{y}{x}=20$

Tweedegraads verbanden

De verschillende verschijningsvormen van de formule voor een kwadratisch verband lenen zich heel goed voor het leren interpreteren van een formule in kenmerken van een grafiek. Parate kennis aan het einde van 3 havo-vwo.

- Uit $y = 2x^2 - 12x + 10$ het snijpunt met de y-as (0, 10) en dalparabool. Schets.
- Uit $y = 2x(x - 6) + 10$ direct afleiden de punten (0, 10) en (6, 10) met de as $x = 3$ en top (3, -8).
- Uit $y = 2(x - 5)(x - 1)$ direct afleiden de punten (1, 0) en (5, 0) met de symmetrieas $x = 3$ en top (3, -8).
- Uit $y = 2(x - 3)^2 - 8$ direct afleiden de top (3, -8).

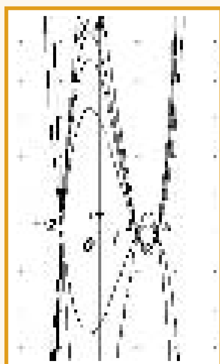
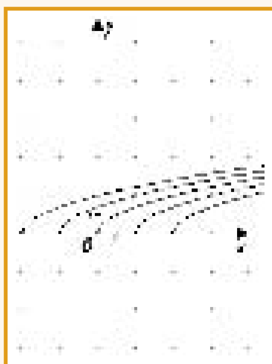
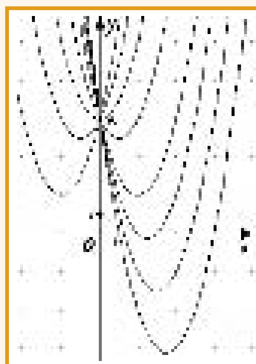
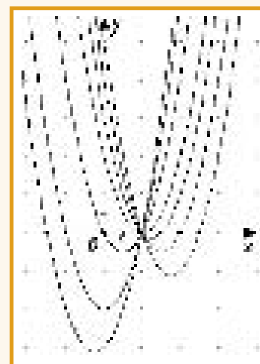





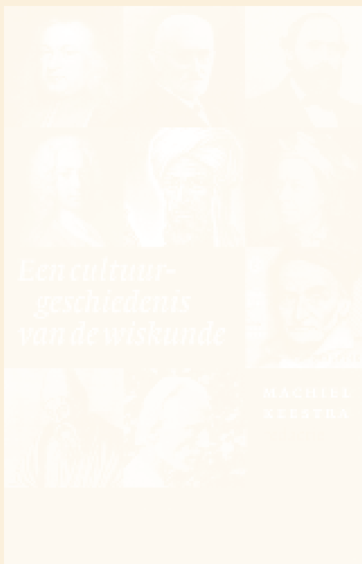
Diverse verbanden

In de bovenbouw havo-vwo moet de parate kennis uit de onderbouw worden onderhouden en afhankelijk van het wiskundevak worden uitgebreid. Met grafische software zijn leerlingen in staat om kenmerken van grafieken zelf op te sporen en bij twijfel weer snel te verifiëren. Hetzelfde geldt voor eenvoudige parametervormen in formules. Snel schetsen van grafieken bij gevarieerde formules draagt bij aan de ontwikkeling van *symbol sense.* Schetsen, controleren, schetsen, controleren en op die manier het gevoel ontwikkelen voor meer complexe formules. Eerst nadenken, dan op de knoppen drukken! En uiteindelijk een stevige kennisbasis toetsen zonder grafische software.

- Schets de families van grafieken van $y = a(x + 2)(x - 3)(x - 5)$, $y = \sqrt{(x + a)}$, $y = x^2 - ax + 6$ en $y = (x - 2)(x + a)$.

Over de auteur
Anne van Streun is wiskundeleraar sinds 1964, wiskundedidacticus aan de Rijksuniversiteit Groningen sinds 1974, en hoogleraar didactiek bètawetenschappen sinds 2000.
E-mailadres: *avstreun@euronet.nl*



Auteur: Machiel Keestra (red.)
Uitgever: Uitgeverij Nieuwezijds, Amsterdam (2006)
ISBN: 90 5712 136 0
Prijs: € 19,95 (VIII + 243 pag.)

Verschenen / Een cultuurgeschiedenis van de wiskunde

Flaptekst - (…) De belangrijkste ontwikkelingen in de geschiedenis van de wiskunde worden in dit boek beschreven, alsmede de wijze waarop die samenhangen met sociale en idee-historische processen. 'Zuivere' en 'toegepaste' (of gemengde) wiskunde blijken elkaar sterk te beïnvloeden. Geest, concepten, technieken en toepassing van Griekse, Indiase en Arabische wiskunde komen aan bod. Na een periode van stagnatie (de Middeleeuwen in de westerse beschaving), volgt een beschrijving van de onstuimige ontwikkeling van de zeventiende eeuw tot de explosie na de Tweede Wereldoorlog. Hoewel zij schijnbaar in verschillende werelden optreden, blijken wiskundige en culturele ontwikkelingen wel degelijk nauw met elkaar verbonden.

Met bijdragen van Machiel Keestra, Albert Grootendorst, Jan Hogendijk, Henk J.M. Bos, Jan van Maanen, Danny Beckers, Teun Koetsier en Tom H. Koornwinder.

Een cultuurgeschiedenis van de wiskunde kwam tot stand in samenwerking met CREA-Studium Generale van de Universiteit van Amsterdam.



Auteur: Janna Levin
Oorspronkelijke titel: A Madman Dreams of Turing Machines
Vertaling: Peter van Huizen
Uitgever: Uitgeverij Contact, Amsterdam/Antwerpen (2006)
ISBN: 90 2542515 1
Prijs: € 22,90 (239 pag.)

Verschenen / Een bezetene droomt van turingmachines

Flaptekst - De vertelster van *Een bezetene droomt van turingmachines* is een jonge natuurkundige. Ze is geobsedeerd door Kurt Gödel, de grootste logicus van de moderne tijd, én Alan Turing, de buitengewoon getalenteerde wiskundige die in de Tweede Wereldoorlog de beruchte Enigmacode wist te breken. De levens van Turing en Gödel komen voor een groot deel overeen door hun geleverde prestaties en mislukkingen. Gödel leed aan grootheidswaanzin en paranoia, en zou zichzelf uiteindelijk doodhongeren. Turing werd opgepakt voor homoseksuele activiteiten en pleegde zelfmoord. De vertelster onderzoekt de feiten van de dramatische verhalen van beiden vanuit het verlangen betekenis te vinden in hun complexe levens en al doende ontdekt ze de tragiek van deze twee mannen. (…)

Verschenen / In de ban van wiskunde

Ondertitel: Het cultuurverschijnsel mathematica in beschaving, kunst, natuur en leven.
Auteur: Rik Verhulst
Uitgever: Garant, Antwerpen/Apeldoorn (2006)
ISBN: 90 441 1989 3
Prijs: € 39,90 (398 pag.)

Flaptekst - In dit boek brengt de auteur een breed panorama van de wiskunde in het bereik van een ruim publiek van zowel wiskundeleken als van wiskundeliefhebbers. Hij belicht daarin de natuurlijke en maatschappelijke relevantie van de wiskunde en de diverse culturele aspecten ervan. De concrete inhouden vergen weinig meer dan wat elementaire begrippen uit de middelbare school en zijn ook voor de gewone 'toerist' vlot toegankelijk. Talrijke voorbeelden en illustraties verduidelijken de tekst. Het boek laat zien hoeveel wiskunde aanwezig is in het leven van elke dag en hoezeer wiskunde cultuur is. (…)

Antwoorden bij 'Als ik zeg wiskunde, wat zegt u dan?'

Zie pag. 166 voor het artikel.
In volgorde van boven naar beneden had u moeten zetten:

Wil
Chilco
Nando
Jolanda
Vera
Joris
Han
en de heer X.

Tevreden over uw mensenkennis?

MathMatch: aansluitingsmodule voor wiskunde

Bijspijkeren van ontbrekende dan wel weggezakte noodzakelijke wiskundig-technische vaardigheden

[André Heck, Nellie Verhoef]

Aansluitingsproblemen

Aansluitingsproblemen vo-ho met als gevolg onvoldoende wiskundig-technische vaardigheden van beginnende studenten zijn niet nieuw én niet tot de landsgrenzen beperkt. Die problemen worden in heel wat sectoren van het hoger onderwijs in Nederland momenteel echter als nijpend ervaren[1,2]. Vooral de technische universiteiten en de faculteiten Economie laten publiekelijk van zich horen. Lokale initiatieven schieten als paddenstoelen uit de grond. Instaptoetsen, waarin de wiskundige basiskennis en basisvaardigheden getest worden, steken de kop op. Als gevolg daarvan worden aan beginnende studenten allerlei bijspijkercursussen aangeboden om de wiskundekennis op het gewenste startniveau voor technische en exacte studierichtingen te brengen. Ook richting scholieren zijn er talloze initiatieven. Zo stelt de Technische Universiteit Eindhoven (TUE) hen in de gelegenheid om via een webinterface sommen te maken. Daarnaast wordt er hulp geboden bij praktische opdrachten en profielwerkstukken. De Technische Universiteit van Delft (TUD) heeft een scholierenlab. Op de Universiteit Twente (UT) trekken de masterclasses en de wiskunde-estafettes jaarlijks veel publiek. De Universiteit van Amsterdam (UvA) timmert in bètapartners-verband[3] aan de weg met een bètabrug-traject, webklassen, profielwerkstuk-ondersteuning en met het ITS-lab voor scholierenonderzoek (ITS = ICT, Technologie en Science). In diverse regionale steunpunten (de 3 TU's met de Radboud Universiteit (RU) en in de regio Amsterdam) worden modules voor de nieuwe wiskundeprogramma's ontwikkeld. Daarnaast is er sprake van niet-lokale activiteiten op dit gebied. Eén van die activiteiten is het ontwerpen van een aansluitingsmodule 'MathMatch'. Onder de paraplu van de Digitale Universiteit (DU) is MathMatch tot stand gekomen met actieve inbreng van de UT, de UvA, de Vrije Universiteit (VU) en de Saxion Hogescholen. Het doel van de module is het vergemakkelijken van de overstap van vo en hbo naar wo, als het gaat om wiskundig-technische vaardigheden. In de praktijk betekent dit dat aankomende en beginnende studenten individueel hun hiaten kunnen opsporen en wegwerken door naar hartenlust te oefenen.

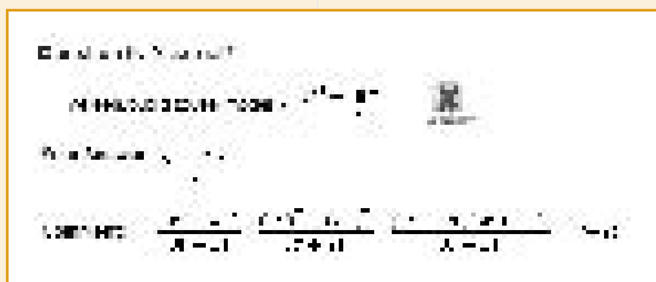


figuur 1 Startpagina van MathMatch webportal: www.mathmatch.nl

Hoe gaat het werken met MathMatch?

De meest effectieve manier om erachter te komen hoe je met MathMatch kunt werken is nog steeds: gewoon zelf dóen. MathMatch bestaat uit drie onderdelen: basiswiskunde, calculus en lineaire algebra. Die keuze berust op de volgende pragmatische overweging: op deze onderdelen ervaren universitaire docenten de meeste problemen. Inhoudelijk is de module ten dele gebaseerd op het boek 'Basiswiskunde' van Jan van de Craats en Rob Bosch[4]. Het hoofdbestanddeel is een webportal (*www.mathmatch.nl* ; ***zie figuur 1***), waar leerlingen toetsen kunnen maken, kunnen oefenen en waar ze (verwijzingen naar) lesmateriaal kunnen vinden.

Binnen MathMatch zijn inmiddels recente 3TU-instaptoetsen en diagnostische toetsen van de UvA beschikbaar. In tegenstelling tot de schoolmethoden spelen contexten in de MathMatch-module geen enkele rol. De nadruk ligt op algebraïsche vaardigheden. De toetsen zijn ontwikkeld met oorspronkelijk materiaal van de Saxion Hogescholen als vertrekpunt. Zo zijn in de praktijk beproefde toetsopgaven bewerkt en aangepast aan de eisen die online toetsing veronderstelt. Uiteraard zijn meerkeuzevragen een mogelijkheid, maar niet altijd de meest adequate vorm om te toetsen. Om ook open vragen waarin geen numeriek antwoord maar een algebraïsch antwoord is vereist te kunnen stellen is speciale software noodzakelijk. Hoewel dit soort software nog volop in ontwikkeling is, bestaan er nu al een aantal goed werkende applicaties. Een voorbeeld van een dergelijke applicatie, die in MathMatch gebruikt wordt, is *Maple T.A.*[5,6] Dit betekent dat antwoorden op vragen niet-numeriek hoeven te zijn (***zie figuur 2***).
Maple T.A. maakt voor het beoordelen van antwoorden meestal gebruik van het computeralgebrasysteem Maple. In Maple T.A. kunnen vragen gerandomiseerd worden, dat wil zeggen van één vraag worden dan vele duizenden varianten gemaakt. Studenten kunnen zodoende onbeperkt oefenen. Een voordeel van online toetsen is onmiddellijke feedback; drie weken voor het nakijken van werk is hier dus niet van toepassing.
Terugkomend op de vraag hoe MathMatch werkt, luidt het antwoord: surf naar de MathMatch portal *www.mathmatch.nl* en ga aan de gang. Ga naar het menu item *New User Tour* (***zie figuur 1***) om te wennen aan het programma Maple T.A. Daarna bent u klaar voor één van de instaptoetsen over Basiswiskunde.



figuur 2 Voorbeeld van feedback op een random gegenereerde vraag uit de UvA-instaptoets 2006

Instaptoets

Instaptoetsen zoals die worden gehanteerd op technische universiteiten, zijn inmiddels een beladen onderwerp geworden. Voor- en tegenstanders hebben hun visie op deze instaptoetsen gegeven.
Voorstanders wijzen op de noodzakelijke minimale wiskundige kennis en vaardigheden die van leerlingen vereist worden om aan een technische of exacte universitaire studie te beginnen. Hiervoor moeten doorstroom-irrelevante onderdelen uit het wiskundeprogramma wijken. Zij vinden het onacceptabel dat er studenten aan een dergelijke studie beginnen zonder aan bepaalde basiskwalificaties te voldoen. Het probleem ligt bij het vo, is hun overtuiging, waarbij vaak in één adem de zorg wordt uitgesproken over het dalende aantal universitair geschoolde docenten in het vo.
Tegenstanders wijzen naar een internationale ontwikkeling van algoritmisch naar betekenisvol wiskundeonderwijs. Zij omarmen de mening dat de nadruk moet liggen op vaardigheden zoals probleemoplossen en redeneren, en niet op de beheersing van wiskundig-technische vaardigheden. Zij vinden de eisen van technische en exacte universitaire studierichtingen buiten proportie, en niet van deze tijd (waarin ICT-gebruik gemeengoed is). Het probleem ligt bij het wo, is hun mening. Het wo moet een lager niveau van de algebraïsche vaardigheden maar accepteren als compensatie van meer vaardigheden die leerlingen op andere terreinen hebben. Het wo dient zelf de verantwoordelijkheid voor de aansluiting te nemen.

Leerlingen en studenten dreigen de dupe te worden van deze uiteenlopende visies. In een enquête na de meest recente diagnostische toets bij exacte wetenschappen aan de UvA verzuchtte een eerstejaars student: ‘Ik heb het gevoel gekregen dat ik op de middelbare school geen wiskunde heb gehad. Ik heb niet het gevoel gehad dat mijn wiskunde B1 aansloot op de stof of dat mijn school er diep genoeg op in is gegaan. Of het ligt aan mij.’ De inzet van MathMatch kan hier wellicht verlichting bieden: er zijn nu mogelijkheden om eigen lacunes op te sporen én weg te werken.
Via MathMatch is het een fluitje van een cent om de meest uiteenlopende toetsen te genereren. Het gaat dan om toetsen waarin voor- én tegenstanders zich kunnen vinden. Uit ervaringen van docenten en uit enquêtes blijkt dat eerstejaarsstudenten vinden dat toetsen helpen om lacunes in wiskundekennis en vaardigheden op te sporen. (UvA-cijfers in 2005 en 2006: 69% en 65% delen deze opvatting.)

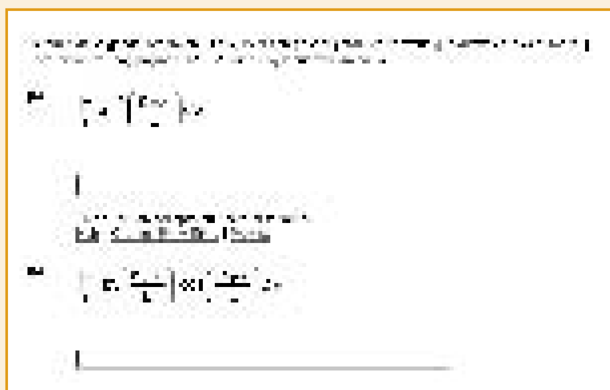
Deze digitale toetsen zijn echter niet helemaal gelijk aan de papieren versie. De vragen zijn hetzelfde. Het verschil zit hem in de manier waarop het antwoord kan worden gegeven en hoe dit beoordeeld wordt. In de online toetsen spelen tussenresultaten vaak geen rol, maar moet de gebruiker alleen het gevonden eindantwoord ter beoordeling intoetsen. Intelligente feedback op het antwoord is hierdoor beperkt. Ook heeft een deelnemer aan een online toets direct te maken met spelregels voor het invoeren van wiskundige formules op een computer. Om hieraan te wennen kunnen gebruikers van MathMatch een ‘New User Tour’ doen. Wiskundige formules zijn op twee manieren in te voeren: grafisch en tekstueel. Met behulp van de muis en het toetsenbord kan grafisch een formule worden samengesteld waarbij de belangrijkste wiskundige functies en symbolen uit een menu kunnen worden geselecteerd. De andere methode maakt geheel gebruik van het toetsenbord. In dat geval moet eerst een aantal conventies worden geleerd. Omdat de meeste leerlingen dit al gewend zijn van de grafische rekenmachine, is dit doorgaans geen struikelblok en anders volstaat een simpele aanwijzing. Hier is enige ervaring mee opgedaan in Twente en Amsterdam.

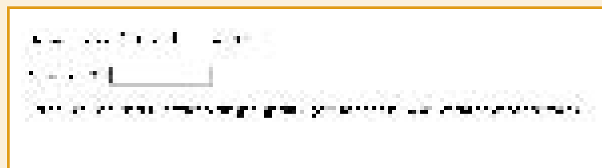
Try-out UT, afdeling Toegepaste Wiskunde
Op de Universiteit Twente is de instaptoets wiskunde dit jaar voor het eerst via het Internet afgenomen. Terwijl de meeste aankomende studenten van de UT in de weer waren met pen en papier, zaten de eerstejaars van de afdeling Toegepaste Wiskunde (TW) achter het toetsenbord en het scherm. Voor het kladwerk mochten ze uiteraard gebruik maken van pen en papier. Dat bleek ook nodig te zijn omdat veel vragen te moeilijk waren om direct uit het hoofd op te lossen. De testgroep bestond uit 20 TW-studenten, die in maximaal anderhalf uur moesten proberen om op 23 vragen het juiste antwoord te vinden. Deze tijd was zo ruim gekozen omdat de deelnemers ook tijd nodig hadden om zich in te schrijven, en om de 'New User Tour' te doen. Desondanks waren alle studenten in staat om ruim voor het einde op de 'quit & save'-knop te klikken. Met deze laatste handeling van de toets werd het nakijken van de opgaven gestart, en iedere student kon onmiddellijk zien wat zijn score was. Hoewel er zich geen onoverkomelijke calamiteiten voordeden verliep de online instaptoets niet geheel vlekkeloos. Zo waren er wat problemen met inschrijven, en ook bij het bepalen van de score liep het programma het soms afweten. Gelukkig waren tijdens de toets twee ontwikkelaars van het MathMatch-team aanwezig die ingrepen zodra zich een probleem voordeed. Desondanks lijkt deze eerste try-out veelbelovend. Zou het dan toch mogelijk zijn om zo de aansluitingsproblemen, als het om wiskundig-technische vaardigheden gaat, aan te pakken?

MathMatching bij de UvA
Eerstejaarsstudenten Wiskunde, Scheikunde, Bio-Exact en Natuur- en Sterrenkunde bij de Universiteit van Amsterdam maken al twee jaar lang diagnostische toetsen via Maple T.A. Het belangrijkste doel van deze toetsing is dat het de studenten helpt bij het inschatten van hun niveau wat betreft wiskundige kennis en vaardigheden ten opzichte van het gewenste niveau na vier weken van Calculus-studie. Het gewenste niveau houdt in: een acceptabele formulevaardigheid, voldoende parate kennis over functies, meer routinematig gebruik van standaardtechnieken en verminderde afhankelijkheid van formulekaart en GRM. Voor een vlotte instap in een exacte studie is het belangrijk dat een student voldoende basiskennis en –vaardigheden bezit, en snel weet aan welke onderwerpen in de wiskunde hij of zij eventueel nog aandacht moet besteden. Uit enquêtes blijkt dat voor 80 tot 90% van de eerstejaars deze doelen helder zijn en dat de getrapte aanpak 'instaptoets in 1ste week – 4 weken sommenpracticum – diagnostische toets in 5e week – bijspijkeren' zinvol geacht wordt. Het percentage van de beginnende studenten dat een opdracht zoals in figuur 2 (vereenvoudig $\frac{9r^2-4s^2}{3r+2s}$) tot een goed einde brengt, was 30% in 2005 en 45% in 2006.
Voor een uitgebreide analyse van toetsresultaten uit 2005 en de correlatie met eerste studieresultaten verwijzen we naar het artikel 'Mathematics on the threshold' (zie [1]). De resultaten van de diagnostische toetsen in 2006 zijn beter, maar zijn toch vergelijkbaar met die van 2005.

Wie denkt dat een wat lager niveau van algebraïsche vaardigheden wel even te repareren is met een snelle cursus, komt bedrogen uit: na 10 weken Calculus-onderwijs heeft menig student nog geen idee dat de afgeleide van een uitdrukking als $\frac{x^2+1}{x}$ sneller en minder foutengevoelig uit te rekenen is door de formule te herschrijven als $x+\frac{1}{x}$ in plaats van zomaar toepassen van de quotiëntregel. Dit is ook een reden dat het bijspijkeren in de scheikundestudie het hele eerste jaar doorgaat. Bij het wiskunde-intensieve vak Quantumchemie maken studenten voorafgaand aan een college korte opgaven om de wiskundekennis op te frissen en zich voor te bereiden. Het voorbeeld in ***figuur 3*** laat zien dat een concrete verwijzing naar de eerdere Calculus-cursus in de opgave is opgenomen.
Door randomisatie van de Maple T.A. opdrachten kunnen studenten zoveel oefenen als ze zelf willen. Ze zijn zelf verantwoordelijk voor hun lesvoorbereiding. Flankerend onderzoek[7] laat zien dat het extra oefenen de studenten wel in staat stelt colleges en werkcolleges beter te volgen. Het blijkt evenwel een noodzakelijke, maar niet *voldoende* voorwaarde te zijn voor het begrijpen van Quantumchemie.

Op grote schaal wordt gebruik gemaakt van MathMatch-materiaal bij de Faculteit Economie van de UvA. Wekelijks maken ruim 300 eerstejaarsstudenten Economie en Bedrijfskunde vaardigheidstoetsen waarmee ze bonuspunten voor het vak Wiskunde 1 kunnen verdienen (in 12 weken een maximum van 1,2 punt). Dit leidt tot ongeveer 750 Maple T.A. toetsen per week,


figuur 3 Voorbeeld van een oefenopdracht bij Quantumchemie (UvA)


figuur 4 Een opdracht uit de vaardigheidstoets in week 9 bij Economie en Bedrijfskunde (UvA)

elk met 20 tot 30 vragen. Niet veel op computeralgebra gebaseerde toetssystemen kunnen dergelijke grote aantallen toetsen in korte tijd aan. Deze vaardigheidstoetsen zijn geïntroduceerd omdat de afgelopen jaren gebleken is dat de wiskundige vaardigheid waarover de binnenkomende studenten volgens de vwo-eindtermen zouden moeten beschikken, in de praktijk onvoldoende aanwezig is. Het gaat daarbij met name om elementaire rekenvaardigheid en vaardigheid in het manipuleren van formules (zie ***figuur 4***), zoals opgenomen in de 'Algebra Refresher' van het bij het vak gebruikte boek 'Introductory Mathematical Analysis'[8].

Hoewel deze wiskunde ook aandacht krijgt tijdens de colleges Wiskunde 1, is het advies aan de studenten om voldoende vaardigheid te verwerven door zelfstandig veel en regelmatig te oefenen. De bonusregeling en het feit dat een toets een hele week digitaal beschikbaar is, maken dat veel studenten dit doen. Maar ze hebben er dan ook alle belang bij: wie het vak Wiskunde 1 in het eerste jaar niet haalt krijgt een bindend negatief studieadvies en mag de opleiding Economie en Bedrijfskunde niet aan de UvA vervolgen.

Voor al het gebruik van MathMatch-materiaal aan de UvA geldt dat het volledig ingebed is in de elektronische leeromgeving *Blackboard*. Hiermee is alle administratieve rompslomp van digitaal toetsen geminimaliseerd en kunnen studenten en docenten een omgeving gebruiken waarmee ze vertrouwd zijn.

Mathfest

Op 15 februari j.l. is het eindproduct van MathMatch tijdens een conferentie op de UT gepresenteerd. Daarbij ging prof. dr. Jan van de Craats expliciet in op de rol van contexten in lesmateriaal.

Natuurlijk kunnen contexten in allerlei opzichten een verrijking betekenen van het wiskundeonderwijs. Maar contexten mogen geen vervangers worden voor oefenopdrachten die nodig zijn om noodzakelijke parate kennis te verwerven.

MathMatch kan echter ook gebruikt worden in vwo 5 of 6, met hetzelfde doel: bijspijkeren van ontbrekende dan wel weggezakte noodzakelijke wiskundig-technische vaardigheden.

Het gaat immers om een probleem dat zowel het wo als het vo aangaat. Leerlingen in vwo 5 en 6 ontdekken zelf ook dat ze 'iets gemist hebben' in de voorafgaande jaren of dat ze 'iets niet meer paraat' hebben en oefenen nodig is. Voor docenten is het onmogelijk om voor elke leerling apart remediërend materiaal te zoeken.

Daarom is MathMatch ook een uitkomst voor leerlingen en docenten in het vo die aansluitingsproblemen pro-actief te lijf willen gaan.

Noten

[1] André Heck, Leendert van Gastel *Mathematics on the threshold*. In: *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, 37 (8), pp. 925-945 (2006) Electronisch beschikbaar op *www.science.uva.nl/~heck/instaptoetsen/ahlvg.pdf*.

[2] Werkgroep 3TU: *Aansluiting vwo en technische universiteiten*. In: *Euclides*, jaargang 81, nr. 6, pp. 242-247 (2006)

[3] *www.betapartners.nl*

[4] Jan van de Craats, Rob Bosch: *Basisboek Wiskunde*. Amsterdam: Pearson Education Benelux (2005). ISBN$_{10}$ 90-430-1156-8. Boekbespreking door Frans Martens in *Euclides*, jaargang 81, nr. 6, p. 312 (2006).

[5] Metha Kamminga: *Digitaal toetsen met Maple T.A.* In: *Euclides*, jaargang 81, nr. 6, pp. 286-290 (2006).

[6] André Heck: *Diagnostic Testing with Maple T.A.* In: M. Seppällä, O. Xambo, O. Caprotti (red.): *WebALT 2006 Proceedings*. Pp. 37-51 (2006). Zie ook: *http://webalt.math.helsinki.fi/webalt2006/content/e31/e176/webalt2006.pdf*.

[7] Lodewijk Koopman, Natasa Brouwer, André Heck: *Remedial Math for Quantum Chemistry*. Paper presentation at SMEC 2006. Zie ook: *http://staff.science.uvanl/~lkoopman/download/SMEC_talk.pdf* (full paper in preparation).

[8] E.F. Haeussler, R.S. Paul, R.J. Wood: *Introductory Mathematical Analysis*. Prentice Hall (2005, 11th ed.). ISBN$_{10}$ 0-13-127629-8.

Over de auteurs

André Heck is projectmanager aan het AMSTEL Instituut van de Universiteit van Amsterdam op het gebied van ICT-toepassingen in onderwijs bij wiskunde en natuurwetenschappen.

Nellie Verhoef is vakdidacticus wiskunde bij de eerstegraads lerarenopleiding ELAN, verbonden aan de Universiteit Twente.

E-mailadressen: *heck@science.uva.nl* en *N.C.Verhoef@gw.utwente.nl*

[Rob Bosch]

De regel van Copeland

Borda-regel

In een van de vorige afleveringen[1] van deze rubriek hebben we de Borda-regel besproken, een regel waarmee de winnaar van een verkiezing kan worden bepaald. In een verkiezing waarbij we de Borda-regel gebruiken, vragen we de kiezers om een voorkeurslijstje. De kiezer rangschikt de kandidaten (voorstellen, partijen, …) naar volgorde van voorkeur. In het geval van vijf kandidaten krijgt iedere eerste voorkeur 5 punten, de tweede voorkeur 4 punten etc. Stel de voorkeuren van vijf kiezers zijn als volgt:

1	2	3	4	5
A	E	A	C	C
D	A	B	B	B
C	B	E	D	E
B	D	D	E	A
E	C	C	A	D

Bij toepassing van de Borda-regel krijgen A, B, C, D en E respectievelijk 17, 16, 15, 12 en 14 punten. A, die de meeste punten krijgt, wint in dit geval de verkiezing.
Tegen de veel gebruikte Borda-regel is in te brengen dat de punten die bij deze regel gegeven worden, mogelijk niet de *mate* van voorkeur voor de kandidaten reflecteren. De eerste kiezer vindt misschien A, D en C min of meer gelijkwaardig. Echter, bij de Borda-puntentelling krijgt A aanzienlijk meer punten dan C. Kiezer 5 ziet wellicht weinig of geen verschil tussen de kandidaten E, A en D. Toch krijgt E drie keer zoveel punten als D. De Borda-regel introduceert een mate van voorkeur waarnaar de kiezer niet is gevraagd.

Voorkeur zonder sterkte: Copeland

A.H. Copeland stelde mede daarom een regel voor die slechts let op de voorkeuren en niet op de mogelijke sterkte van de voorkeur. De simpele grondgedachte van deze regel is: als een meerderheid van de kiezers een kandidaat A prefereert boven een concurrent B, dan is deze kandidaat A in de onderlinge vergelijking beter dan kandidaat B. Een kandidaat wordt aantrekkelijker als winnaar van de verkiezing naarmate hij meer concurrenten in een onderlinge vergelijking verslaat. In ons voorbeeld prefereren drie van de vijf kiezers A boven B. Een meerderheid vindt A dus beter dan B. Hetzelfde geldt voor A en C; drie van de vijf kiezers verkiezen A boven C. Aangezien vier van de vijf kiezers A prefereren boven D, is A ook duidelijk beter dan D. Alleen tegen kandidaat E verliest A met drie tegen twee stemmen.
De onderstaande tabel geeft de resultaten van de onderlinge vergelijkingen overzichtelijk weer. Een 1 op plaats (A, B) betekent dat A wint van B (een meerderheid verkiest A boven B). Uiteraard volgt dan dat op plaats (B,A) een 0 verschijnt.

	A	B	C	D	E	
A	*	1	1	1	0	3
B	0	*	0	1	1	2
C	0	1	*	0	1	2
D	0	0	1	*	0	1
E	1	0	0	1	*	2

We zien dat A drie keer wint in een paarsgewijze vergelijking en dat E slechts één keer wint. Het aantal overwinningen van een kandidaat in de onderlinge vergelijkingen met de andere kandidaten heet de Copeland-score van die kandidaat. Bij toepassing van de 'Regel van Copeland' wint de kandidaat met de hoogste score. We kunnen op basis van de scores ook een rangschikking van de kandidaten maken. Aangezien A hier de meeste kandidaten verslaat in een onderlinge vergelijking, wint A de verkiezing. We kunnen op basis van de bovenstaande tabel ook een eindrangschikking maken van de kandidaten. Deze ziet er dan als volgt uit:

$$A > B = C = D > E$$

De Copeland-regel is eenvoudig te hanteren en is bovendien intuïtief aantrekkelijk. Immers, diegene die de meeste onderlinge vergelijkingen (wedstrijden) wint, wordt de kampioen.

Tweede voorbeeld

Ter illustratie nog een voorbeeld.

6	7	8	9	10
E	E	B	B	C
D	D	A	A	A
B	B	D	D	E
A	A	C	C	D
C	C	E	E	B

De tabel van de paarsgewijze vergelijkingen ziet er hier als volgt uit:

	A	B	C	D	E	
A	*	0	1	1	1	3
B	1	*	1	0	0	2
C	0	0	*	0	1	1
D	0	1	1	*	0	2
E	0	1	0	1	*	2

A verslaat ook hier de meeste kandidaten, zodat ook bij deze verkiezing A de winnaar wordt.
Zoals gezegd, is de Copeland-regel een regel die intuïtief aanspreekt. Er bestaat op het eerste gezicht een grote overeenkomst tussen deze regel en de wijze waarop we onze nationale voetbalcompetitie organiseren. Daarbij telt aan het eind ook het aantal behaalde punten. (In een zeldzaam geval kan het doelsaldo een rol spelen.) Er lijkt dus weinig mis te kunnen gaan met de Copeland-regel.

Paradox

We voegen de kiezers 1 t/m 5 en 6 t/m 10 samen en bepalen met behulp van de Copeland-regel de favoriete kandidaat van de gezamenlijke groep. Dit lijkt op het eerste gezicht onzinnig omdat A de favoriete kandidaat is van zowel de eerste groep kiezers als van de tweede groep kiezers. De voorkeurstabel van de gezamenlijke groep is:

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
A	E	A	C	C	E	E	B	B	C
D	A	B	B	B	D	D	A	A	A
C	B	E	D	E	B	B	D	D	E
B	D	D	E	A	A	A	C	C	D
E	C	C	A	D	C	C	E	E	B

We bepalen weer de uitslagentabel bij deze voorkeuren. Omdat het aantal kiezers nu even is, kan het voorkomen dat in een onderlinge vergelijking de stemmen staken. In dat geval geven we beide kandidaten een half punt.

	A	B	C	D	E	
A	*	0	1	1	0,5	2,5
B	1	*	1	1	1	4
C	0	0	*	0	1	1
D	0	0	1	*	0	1
E	0,5	1	0	1	*	2,5

We zien dat kandidaat B duidelijk beter scoort dan de andere kandidaten, zodat B de verkiezing wint! Dit is op zijn minst opmerkelijk. Men zou toch verwachten dat de keuze voor A van beide delen ook de keuze is voor de totale groep. Inderdaad, een paradoxaal resultaat.
Het bovenstaande voorbeeld is des te opmerkelijker daar kandidaat B in de totale groep van kiezers iedere andere kandidaat verslaat. B is derhalve de enige meerderheidskandidaat. Een dergelijke kandidaat noemen we de Condorcet-winnaar (zie [2]).
Als we echter de kiezerspopulatie opsplitsen in twee districten, dan wint B, bij toepassing van de Copeland-regel, in geen enkel district. Door een aantal kopieën te maken van de twee voorkeurstabellen krijgen we een situatie waarin A in 4 van de 4 of 6 van de 6 districten wint, maar B winnaar wordt als we een landelijke verkiezing houden. Merk op dat dit verschilt van de Britse situatie.
Als in Engeland een partij in ieder district wint, dan wint deze ook de verkiezing als alle districten samengevoegd worden.

Laten we eens een beeld schetsen bij de besproken paradox. Stel dat we besluiten de vice-voorzitter van de Raad van State te laten kiezen door de Staten Generaal. We hanteren hierbij de Copeland-regel. Het kiezen van een invloedrijk persoon spreekt waarschijnlijk democratisch wel aan en ook de daarbij gehanteerde regel oogt zeer democratisch. De verkiezing in de Eerste Kamer wordt gewonnen door kandidaat A en deze wint ook de verkiezing in de Tweede Kamer. Het is nu duidelijk dat A de meest geschikte kandidaat is voor de positie als vice-voorzitter. Er is echter een procedurefout gemaakt. De verkiezing had volgens het reglement moeten plaatsvinden in een gezamenlijke vergadering van de beide Kamers. Deze verkiezing is, zo zal menigeen denken, slechts een formaliteit. Immers, A wint de verkiezing in beide kamers. De gezamenlijke vergadering kiest echter kandidaat B. Hoe zullen de kamerleden en de parlementaire journalisten hierop reageren?



Opgaven

De Copeland-regel is eenvoudig te begrijpen. Voor leerlingen, maar wellicht ook voor de lezer, is het een aardige opgave om een soortgelijk voorbeeld te construeren als hier gepresenteerd is. Of nog aardiger, een voorbeeld waarbij een kandidaat in drie districten wint maar toch niet de winnaar wordt van de verkiezing waarbij die drie districten samengevoegd worden.
Is het mogelijk dat een kandidaat in alle districten wint maar in de landelijke verkiezing in de rangschikking op de laatste plaats eindigt?

Literatuur

[1] Rob Bosch: *De Diskwalificatie Paradox*. In: *Euclides* 81-2, pp. 74-76
[2] Rob Bosch: *De Condorcet Paradox*. In: *Euclides* 82-3, pp. 103-104

Over de auteur

Rob Bosch is redacteur van *Euclides* en universitair hoofddocent aan de Koninklijke Militaire Academie te Breda.
E-mailadres: *r.bosch2@nlda.nl*

[Gert de Kleuver]

Magische vierkanten

van Lo-Shu tot sudoku / De wonderbaarlijke geschiedenis van wiskundige puzzels



Auteur: Arno van den Essen
Uitgave: Veen Magazines (Baarn, 2006)
ISBN13: 9 7890 8571 0523
Prijs: € 17,50

Nieuwsgierigheid opgewekt

Net voordat bovengenoemd boek uitkwam, las ik in een landelijk dagblad een vooraankondiging met een korte inhoudelijke bespreking van bovengenoemd boek. Nu wil de hoofdredacteur altijd weten in welk dagblad en wie de auteur van de bespreking was. Het is me tot op heden niet gelukt via zoeksites op internet om dit te achterhalen. Maar het gevolg van het lezen van de vooraankondiging was dat ik direct het boek besteld heb bij de boekhandel. Ik vond het aardig om te lezen dat de auteur probeerde een boek te schrijven met achtergronden van de sudoku en daarbij in een goed leesbaar hoofdstuk een mogelijke oplossing gaf voor het Franklin-mysterie. Er werden voor de mogelijke methode geen moeilijke wiskundige formules gebruikt; Van den Essen had genoeg aan goede omschrijvingen.
Zo werd mijn nieuwsgierigheid opgewekt.

Korte inhoud

In het voorwoord wordt het doel van het boek duidelijk omschreven: wat is de herkomst van de sudoku-puzzel. Niet de oplosstrategieën worden behandeld, want daar zijn al een paar honderd boekjes van. Het gaat om achtergrondinformatie van de puzzel voor een geïnteresseerde puzzelaar. Via oude Lo Shu magische vierkanten komen we bij Euler terecht. Uitgebreid worden 'gesloten toeren' binnen magische vierkanten besproken. Waar Euler waarschijnlijk wel de eerste geweest is die een goede analyse van het paardentoerprobleem gaf, was hij niet de eerste die een complete toer beschreef. Met behulp van de bekende paardensprong van het schaakbord worden rondgangen gemaakt. Liefst moeten alle velden een keer gepasseerd worden en het mooiste is als je dan eindigt waar je gestart bent. Vervolgens wordt er gekeken naar de getallen op het bord om zo weer allerlei voorwaarden vast te leggen. In hoofdstuk 10 komt dan en passant het Franklin-mysterie aan de orde. Franklin heeft volgens Van den Essen de meest magische vierkanten gemaakt die ooit gepubliceerd zijn. Het gaat om magische vierkanten van 16 bij 16 die gevuld worden met de getallen 1, 2, 3, …, 256 met drie bijzondere kenmerken. Eén ervan is: de som van alle getallen in iedere halve kolom of rij is gelijk aan de helft van de magische som. Hoe deze magische vierkanten door Franklin gemaakt werden is het mysterie. Op bladzijde 133 wordt de mogelijke oplossing van het mysterie gegeven.

De sudoku zoals we deze nu kennen, is in 1979 bedacht door Howard Garns. Vijf jaar na de eerste publicatie kwam de puzzel onder ogen van een groep puzzelmakers Nikoli die de naam Su Doku bedachten (Su = getal en Doku = alleen.) Na twintig jaar werd het een rage in Engeland en enkele jaren geleden publiceerde dagblad Trouw tijdens de zomervakantie de eerste dagelijkse puzzel.

Conclusie

Het boek leest heel vlot weg. Het is duidelijk geschreven voor een groot lezerspubliek dat niet opgezadeld wenst te worden met allerlei formules. In de tweede helft van het boek staan de formules en oplossingen apart vermeld. Het bladeren in het aanhangsel ging mij op den duur wel vervelen en ik kan me voorstellen dat heel veel lezers juist dit aanhangsel overslaan. Iemand die juist een mooi wiskundig bewijs wil lezen, zal dit boek niet als eerste pakken.
Het boek is verder mooi verzorgd.

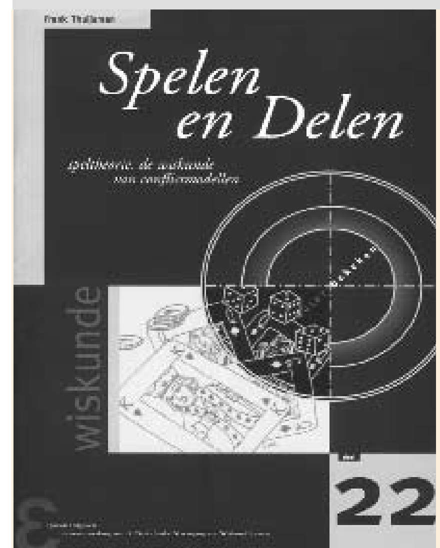
Over de recensent
Gert de Kleuver is afdelingsleider op het Ichthus College te Veenendaal.
E-mailadres: *g.de.kleuver@nvvw.nl*

[Rob Bosch]

Spelen en Delen

Speltheorie, de wiskunde van conflictmodellen

(Zebra 22)



Auteur: Frank Thuijsman
Uitgever: Epsilon Uitgaven, Utrecht (2005)
ISBN: 90-5041-095-2
Prijs voor niet-leden van de NVvW: € 9,00

Geschikt onderwerp

Het Zebra-boekje Spelen en Delen behandelt een aantal onderwerpen uit de speltheorie. Dit boeiende onderdeel van de wiskunde lijkt mij voor de Zebra-reeks een prima aanvulling. Enerzijds omdat de speltheorie sinds de verschijning in 1944 van het boek *Theory of Games and Economic Behavior* van John von Neumann en Oscar Morgenstern een vaste en belangrijke plaats heeft binnen de wiskunde. Anderzijds omdat de speltheorie een groot aantal toepassingen kent binnen onder andere de economie, de biologie en de sociale wetenschappen. Bovendien is voor een eerste kennismaking met de speltheorie geen specifieke voorkennis vereist; de lezer (leerling) die het boekje bestudeert hoeft geen uitgebreide kennis te hebben van analyse, goniometrie of meetkunde. Dit maakt het boekje geschikt voor een grote groep leerlingen.
Een aardige bijkomstigheid is dat het door John Nash geïntroduceerde en naar hem genoemde begrip 'Nash-evenwicht' in het boek besproken wordt. Een aantal lezers zal zijn naam kennen uit de succesvolle film *A Beautiful Mind*.

Betwist kleed

Het boek opent met een hoofdstuk over een bankroet-probleem. Hoe moet een bedrag van bijvoorbeeld 210 euro over twee eisers worden verdeeld als de ene eiser een vordering heeft van 100 euro en de ander een vordering van 200 euro? De evenredige verdeling van 70 en 140 euro is dan uiteraard een mogelijkheid. De auteur bespreekt een verdeling die gebaseerd is op het principe van het *betwiste kleed* dat teruggaat tot eeuwenoude Joodse religieuze wetteksten neergelegd in de Talmud. De uitkomsten van de verdelingen zijn verrassend, zeker bij eerste lezing. Zo geeft het betwiste kleed principe in het bovenstaande geval een verdeling van 50 en 160.
De schrijver werkt dit principe uit aan de hand van opgaven met meer dan twee eisers. Het algoritme van Aumann voor het algemene geval komt daarna aan de orde. Het hoofdstuk wordt besloten met een presentatie van het algoritme aan de hand van communicerende vaten, een idee van Marek Kaminski (2000). De uitwerking van dit idee voor allerlei verdelingsprincipes kan menig fraai werkstuk opleveren. De schrijver nodigt de lezer daartoe ook uit in een van de eindopdrachten.
Jammer dat Thuijsman geen uitgewerkt voorbeeld geeft; hierdoor kan de specifieke vorm van de communicerende vaten gemakkelijk aan de lezer voorbij gaan.

Veel begrippen

Het tweede hoofdstuk gaat over coöperatieve spelen. Dit zijn spelen waarin coalities een belangrijke rol spelen. De auteur introduceert deze spelen aan de hand van het in het eerste hoofdstuk besproken verdelingsprobleem. De oplossingen (verdelingen) uit het eerste hoofdstuk krijgen hiermee een algemener kader. In zeven bladzijden bespreekt de schrijver een aantal belangrijke concepten in verband met dit soort spelen. Aan de orde komen de karakteristieke functie, de core, de Shapley-waarde en de nucleolus van David Schmeidler (1969). De core en de nucleolus worden inzichtelijk geïllustreerd met driehoeken.
De bovengenoemde begrippen zijn basisbegrippen van de speltheorie maar dat betekent niet dat ze ook conceptueel eenvoudig zijn. Het aan de orde stellen van zoveel begrippen in een gering aantal pagina's zou wel eens te veel van het goede kunnen zijn voor veel leerlingen.

Kabouters, gevangenen en het huwelijk

Het derde hoofdstuk, dat uit slechts vier pagina's bestaat, heeft als titel: 'Rationaliteit en Kennis'. De auteur geeft aan de hand van een aantal aardige opgaven waarin kabouters figureren, een beeld van wat in de speltheorie wordt verstaan onder complete informatie. Kort gezegd het idee van: ik weet dat jij weet dat ik weet dat jij weet dat…
Na deze uitleg bespreekt hij kort de zogeheten 'spelen in uitgebreide vorm', dat wil zeggen spelen gerepresenteerd door beslisbomen.
In de volgende twee hoofdstukken komen spelen in strategische vorm en matrixspelen aan de orde. Bij de behandeling van spelen in strategische vorm wordt het bekende Nash-evenwicht besproken. Maar ook het begrip 'gecorreleerd evenwicht' van Aumann, aan de hand van het spel dat bekend staat als 'de Strijd der Sexen'.
Het Prisoner's Dilemma sluit hoofdstuk 4 af. Dit bekende spel kent vele toepassingen. De schrijver geeft helaas geen van deze toepassingen.
Bij de matrixspelen is de minimax-stelling het centrale thema.
Het laatste hoofdstuk heeft als titel 'Huwelijksproblemen' - in wiskundige zin te verstaan. Het probleem dat hier besproken wordt, gaat over stabiele koppelingen op de huwelijksmarkt. Een aantal mannen en vrouwen vormen koppels. Zowel de mannen als de vrouwen hebben een preferentie over de personen van de andere sexe. Een stabiele koppeling is nu een koppeling waarbij er geen paar is dat elkaar liever heeft dan de partners aan wie ze gekoppeld zijn. De herhaalde-aanzoekmethode geeft een dergelijke stabiele koppeling.
Een hoofdstukje met eindopdrachten, de antwoorden en een relevante literatuuropgave sluiten het boekje af.

Rijke inhoud, niet eenvoudig

Het bovenstaande geeft een beeld van de rijke inhoud van het boekje. Gelet op de vele onderwerpen die aan de orde komen, ben je verbaasd dat het boekje slechts 50 pagina's telt. Ieder onderwerp leent zich goed voor eigen onderzoek door leerlingen. Wat dat betreft is het boekje zeker het aanschaffen waard.
Over de presentatie van de diverse onderwerpen ben ik wat minder enthousiast. De schrijver heeft wel heel veel vertrouwen in het vermogen van leerlingen om zich nieuwe begrippen eigen te maken. Veel van de door hem geïntroduceerde begrippen behoren weliswaar tot de basisbegrippen van de speltheorie, maar dat wil niet zeggen dat ze ook eenvoudig zijn. Bij de coöperatieve spelen bijvoorbeeld komen op drie bladzijden maar liefst negen nieuwe begrippen aan de orde. Dit lijkt mij zeker voor leerlingen te veel van het goede. Temeer daar de auteur veelal eerst de begrippen aan de orde stelt om ze daarna pas te illustreren aan de hand van een voorbeeld. Didactisch lijkt mij dit de verkeerde volgorde.
De spelen in uitgebreide vorm zijn mijns inziens begripsmatig het eenvoudigst en vormen daardoor een goede eerste kennismaking met het vakgebied. De geringe aandacht die de auteur daaraan besteedt, en de plaats in het boekje vind ik opmerkelijk. Iets dergelijks geldt ook voor de hoofdstukken 4 en 5. In hoofdstuk 5 komen nulsomspelen aan de orde. Deze zijn eenvoudiger dan de spelen die in hoofdstuk 4 aan de orde komen. Bovendien kunnen sommige begrippen uit hoofdstuk 4 heel goed aan de hand van de relatief eenvoudige nulsomspelen worden geïllustreerd. Verwisseling van de volgorde van de hoofdstukken had voor mij dan ook voor de hand gelegen.
Samenvattend: deel 22 uit de Zebra-reeks is naar inhoud een mooi maar qua presentatie een moeilijk boekje.

Over de recensent
Rob Bosch is redacteur van *Euclides* en universitair hoofddocent aan de Koninklijke Militaire Academie te Breda.
E-mailadres is: *r.bosch2@nlda.nl*

Conferentie voor vmbo en onderbouw; een verslag

[Joke Verbeek m.m.v. Gert de Kleuver]

Woensdag 17 januari 2007. Ede, op de Veluwe, de Reehorstconferentie voor vmbo en onderbouw havo/vwo. Dé plaats voor docenten uit die schoolsoorten om inspiratie op te doen, kennis te nemen van de laatste ontwikkelingen en elkaar te ontmoeten.
Een verslag.

‘Alle presentaties gaan door’, meldt Lambrecht Spijkerboer van het organiserende APS trots in zijn openingswoord. ‘Er is belangstelling voor alle 16 presentaties, evenals voor de acht workshops.’
Vervolgens roept hij op ideeën aan te dragen voor volgend jaar; van de wensen van vorig jaar is er dit jaar een aantal gehonoreerd. Dat de organisatie houdt van vroege aanmeldingen, wordt onderstreept door de uitreiking van een bos bloemen aan de eerste aanmelder van dit jaar.

Gecijferdheid

Voor de openingslezing heeft Kees Hoogland (APS) het ambitieuze plan opgevat de 150 aandachtig luisterende docenten in 40 minuten zowel voor te lichten over het begrip ‘gecijferdheid’ alsook een link te leggen naar de discussie over vaardigheden.
Wat is eigenlijk gecijferdheid? Om dat begrip te vullen vertoont Kees in vlot tempo een serie (‘80’, volgens een gecijferde collega uit de zaal) beelden, foto’s van diverse situaties uit de dagelijkse praktijk waarbij getallen een rol spelen: van parkeermeter tot braille en van weerbericht tot Arabische tegels. Gelukkig verwijst hij degenen die het allemaal niet zo snel kunnen verwerken – ook handig voor degenen die er niet zijn – naar de site *www.gecijferdheid.nl*. De boodschap is duidelijk: de wereld is vol met getallen, je kunt er niet omheen. Vervolgens definieert Kees gecijferdheid als ‘de kennis, vaardigheden en persoonlijke kwaliteiten nodig om adequaat en autonoom om te gaan met de kwantitatieve kant van de wereld om je heen.’ Met die definitie is het duidelijk dat gecijferdheid van essentieel belang is voor de zelfredzaamheid van iedereen, dus ook voor die van de leerling uit bijvoorbeeld de basisberoepsgerichte leerweg. Met een aantal praktijkvoorbeelden op video laat Kees zien dat *rekenen* (cijferen) in het dagelijks leven weinig voorkomt, en dat dan kan worden uitgeweken naar de rekenmachine, maar dat *getalbegrip* van groot belang is. Hij vraagt zich vervolgens af of kale sommen oefenen de goede manier is om gecijferdheid aan te brengen.


figuur 1 Gecijferdheid

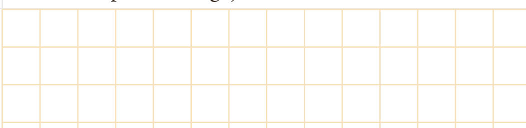
Professor Van de Craats stelt dat zijn ‘Basisboek rekenen’ zal helpen om met vlag en wimpel te slagen voor elke rekentoets. Een gecijferd mens weet dan raad met opgaven als $\frac{\frac{1}{3}\times\frac{6}{8}}{\frac{1}{3}+\frac{3}{5}}$.

Kees vraagt zich zeer af wat dit nu bijdraagt aan gecijferdheid van leerlingen of studenten, en dus ook wat nu eigenlijk de relevantie is van al die toetsen. Zulk formeel rekenen heeft wel waarde, maar je moet je wel afvragen wanneer, voor welke leerlingen, en met welk doel.

En hoe zit het met al die krantenberichten die met grote letters verkondigen dat het zo slecht gesteld is met de gecijferdheid van de Nederlandse jeugd? Die hebben gelijk, maar alleen waar het gaat over cijferend rekenen. Dat is gebleken uit de laatste Periodieke Peiling van het Onderwijsniveau (PPON). Het niveau bij de overige drie onderwerpen, hoofdrekenen, schattend rekenen, verhoudingen breuken en procenten is gelijk gebleven of vooruitgegaan. En juist díe zijn van belang om gecijferd te worden. Ook bij internationale vergelijkende onderzoeken blijkt dat de Nederlandse jeugd niet alleen vooruitgaat, maar ook beter scoort dan de jeugd uit andere westerse landen. Cijferen, zo houdt Kees zijn gehoor voor, is net als het topje van de ijsberg, het meest zichtbare deel van gecijferdheid. Het grootste deel, getalbegrip, verbindingen kunnen leggen et cetera, is een voor buitenstaanders vaak onzichtbaar deel, maar omvangrijker en fundamenteler dan het topje. Gelukkig wordt in het basisonderwijs wel goed aandacht besteed aan die onderliggende onderwerpen. De krant heeft gecijferdheid en cijferen dus met elkaar verward. Jammer. Maar het is eigenlijk erger dat de Onderwijsraad dat in zijn laatste publicatie ‘Versteviging van kennis’ ook doet. Die zou beter moeten weten, zo besluit Kees zijn lezing.
Op naar de workshops en de presentaties of de leermiddelenmarkt.

Spullen

Voor de kraampjes van de uitgeverijen, de fabrikanten van rekenmachines en de verenigingsstand is de hele dag door belangstelling. Opvallend is dat er steeds meer kramen komen met leermiddelen die inzetbaar zijn in de onderbouw, veel puzzels en spelletjes, vaak afkomstig uit Groot-Brittannië en andere buitenlanden. Veel docenten vertrekken met een doos, een poster of een spelletje, of ze hebben een bestelbon achtergelaten. De vertegenwoordiger van elektronische schoolborden heeft voortdurend een talrijk belangstellend gehoor. Leuk speelgoed voor docenten. Staat het ook bij uw sectie op de verlanglijst?





figuur 2
Klimaatverandering

Klimaatveranderingen in de achtertuin

De tweede plenaire lezing, van bioloog Arnold van Vliet, heeft als onderwerp de klimaatverandering. Met veel tabellen en grafieken laat hij zien dat er na 1988 sprake is van een significante temperatuurstijging. Een klimaatverandering dus. De temperatuurstijging en de toegenomen concentratie van CO_2-deeltjes in de lucht, het broeikaseffect, worden voor de helft veroorzaakt door menselijke activiteiten. De andere helft kan volgens Van Vliet worden toegeschreven aan de zonnecyclus en de vulkanische activiteit. De gevolgen van de klimaatverandering zijn zowel positief als negatief.
Om die gevolgen vast te leggen is een grootschalig project gestart: de *Natuurkalender*, een waarnemingsprogramma dat ecologische veranderingen in beeld wil brengen. Als school of klas maar ook als individu kan men zich inschrijven als waarnemer. Een leuk project om met leerlingen aan deel te nemen; de vele grafieken en tabellen vormen de link met wiskunde. Meer informatie is te vinden op de site *www.natuurkalender.nl*.

Dyscalculie

Met het verschijnsel dyscalculie wordt menig wiskundedocent vandaag de dag geconfronteerd. Bestaat het nou wel of bestaat het nou niet? Dat is de eerste vraag die Douwe Kok (APS) aan de orde stelt. Hij laat vervolgens zien dat dyscalculie wel degelijk bestaat, maar dat niet alle leerlingen die zwak zijn in wiskunde dyscalculie hebben. Toch moeten er op elke school veel leerlingen met dyscalculie rondlopen, want het treft volgens Kok zo'n 3 tot 4 procent van de bevolking. Dat is toch in elke klas ongeveer één!
Het is niet de taak van de wiskundedocent dyscalculie vast te stellen, maar wel om alert te zijn op signalen, en de leerling bij vermoeden van dyscalculie door te verwijzen naar bijvoorbeeld een orthopedagoog voor onderzoek. Die signalen zijn bijvoorbeeld: laag scoren voor wiskunde bij verder voldoende prestaties, slecht eenvoudige sommetjes kunnen maken (12 – 5) of het verwisselen van cijfers in een getal. Is eenmaal dyscalculie vastgesteld, dan moet gezocht worden naar maatregelen die die leerling kunnen helpen. Het zou goed zijn als de school hierop beleid ontwikkelt, zodat net als bij dyslexie duidelijk is welke mogelijkheden er voor leerlingen zijn om met hun handicap toch een diploma te bemachtigen. Te denken valt aan verlenging van proefwerktijd, hulpmiddelen als een map met oplossingsmogelijkheden, een rekenkaart of compenserende opdrachten.
Verder komt in Douwes presentatie nog naar voren dat er niet zozeer sprake is van een toename van leerlingen met dyscalculie, maar van een toegenomen *bewustzijn*.
Ook blijkt dat er nog geen behandelingen aan te wijzen zijn waarvan de werking is bewezen. Veel behandelingen lijken op het geven van 'gewoon' goed onderwijs.
De aanwezige docenten gaan duidelijk wijzer naar buiten dan ze naar binnen gingen. En daar gaat het natuurlijk om op zo'n conferentie.



figuur 3 Project Vreelande

Inspiratie voor de wiskundeles

Bert van der Windt en Cees de Hoog vertellen hoe zij bepaalde perioden van het jaar de lessen anders invullen door gebruik te maken van materiaal dat overal voorhanden is. Bekend is het project *Vreelande*. De leerlingen uit een vmbo-3-klas moeten met echt materiaal van de nieuw te bouwen woonwijk Vreelande in 's-Gravenzande aan het werk. Een eigen slaapkamer moet worden ingericht. De beide werkgroepleiders laten nog heel veel ander bruikbaar materiaal zien en geven dat mee aan de collega's.
Ina Klinkenberg had vorig jaar veel te veel materiaal bij zich. Dit keer beperkt ze zich tot het spel *Wiskunde Bingo*. Het spel wordt ter plekke uitgelegd, gespeeld en meegegeven aan de collega's. Voor geïnteresseerden is het te vinden op *www.calvijnmetjuniorcollege.nl/leerlingen/vakken/wisond/docent.php*.

Wegblijvers

Op de evaluatieformulieren, maar ook spontaan bij het naar buiten lopen, spreken de deelnemers zich positief uit over hetgeen ze gezien en gehoord hebben. Mocht op andere bijeenkomsten de nadruk misschien liggen op de wiskunde en ontwikkelingen in het wiskundeonderwijs in het eerstegraads gebied, hier staat juist het tweedegraads lesgebied centraal. Jammer dat veel docenten de kans laten liggen aanwezig te zijn. Is er geen belangstelling onder deze docenten voor studiedagen? Of mogen en willen we juist in die onderbouw en in het vmbo niet 'de school uit' omdat we de leerlingen regelmaat, structuur en begeleiding willen geven? Toch hebben de wegblijvers ongelijk, want een goede studiedag kan een opkikker geven die zich vertaalt in kwaliteitsverbetering van de lessen. En dan is die ene dag lesuitval snel terugverdiend!

Over de auteurs
Joke Verbeek is docent op het Arentheem College (locatie Middachtensingel, voor vmbo-GT en havo) te Arnhem.
Gert de Kleuver is afdelingsleider op het Ichthus College te Veenendaal.
Beiden maken deel uit van de redactie van Euclides.
E-mailadressen: *jokeverbeek@chello.nl* en *g.de.kleuver@nvvw.nl*

Een code voor de precieze positie-bepaling van een lange as

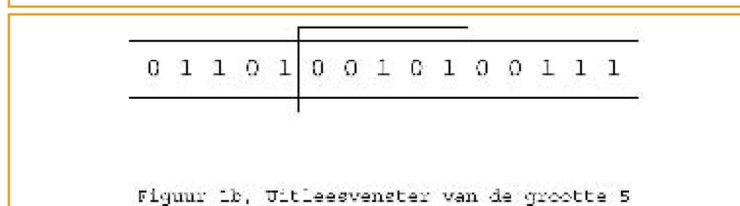
[Bram van Asch en Henk van Tilborg]

Tegen wiskunde kun je op verschillende manieren aankijken. Voor leerlingen in het voortgezet onderwijs is het meestal een vak op zich, met af en toe een uitstapje naar andere vakken zoals bijvoorbeeld natuurkunde en economie. Wiskundigen beoefenen ook vaak het vak op zich; zij geven daar onderwijs in, of verrichten onderzoek met het doel wiskundige problemen op te lossen. Er zijn ook wiskundigen die zich met name bezighouden met het oplossen van wiskundige problemen die uit andere disciplines voortkomen.We spreken dan van toegepast wiskundigen. Bij ons op de Technische Universiteit Eindhoven wordt de wiskunde ook vaak gebruikt om concrete problemen uit het bedrijfsleven of van de overheid op te lossen. In dit artikel beschrijven we een dergelijke situatie. Het doel daarbij is tweeledig. Het geeft een voorbeeld uit de mogelijke beroepspraktijk van wiskundigen. En het kan wellicht een idee opleveren voor een praktische opdracht. Ook wordt er onder andere in Eindhoven in het kader van wiskunde D materiaal in deze richting ontwikkeld.

Het probleem

Ruim tien jaar geleden werd de TU/e benaderd door het bedrijf PNEU/TEC, dat zich onder andere bezighoudt met de vervaardiging van pneumatische zuigers. Deze zuigers kunnen tot een lengte van 6 meter uitgeschoven worden, maar het bedrijf wilde in staat zijn dit uitschuiven te doen met een precisie van 20 µm.
Ze hadden hiervoor zelf al de nodige ideeën ontwikkeld maar kwamen er ook achter dat ze een bepaalde, zeer specifieke expertise misten. Hun idee was om met behulp van een laser een 'streepjescode' op de as aan te brengen. Door deze met een simpele digitale camera (CCD-chip) uit te lezen en die informatie terug te koppelen naar het loopwerk van de as kan een gewenste positionering bereikt worden. Om technische redenen was het aantrekkelijk te kiezen voor een 'binaire' code. De codering op de as bestond uit velden van 0,6 mm, die opgebouwd zijn uit een streepje van 0,4 mm breed gevolgd door een leeg gebied van 0,2 mm (een 1) dan wel een streepje van 0,2 mm gevolgd door een leeg gebied van 0,4 mm (een 0); ***zie figuur 1a***. Voor 6 meter heb je $\frac{6}{0{,}0006} = 10000$ velden nodig.

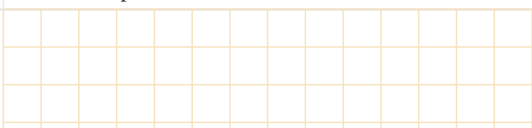




figuur 1 De codering op een lange as

In ***figuur 1b*** hebben we de velden vervangen door nullen en enen. De digitale camera leest in deze figuur slechts 5 opeenvolgende symbolen uit. Dat is veel te weinig omdat dat maar aanleiding geeft tot $2^5 = 32$ verschillende uitlees-rijtjes en we er 10000 nodig hebben. Aangezien 2^{14} de eerste macht van 2 is die groter is dan 10000, zou het venster ten minste 14 opeenvolgende symbolen moeten kunnen uitlezen.

Op deze manier kan de positie bepaald worden met een nauwkeurigheid van 0,6 mm. De gewenste uitlees-nauwkeurigheid van 20 µm wordt verkregen doordat de pixelgrootte op de CCD-chip veel kleiner is; zo'n veld van 0,6 mm wordt dus uitgelezen door heel veel pixels. Als een pixel zwart uitleest en de volgende wit, weet je natuurlijk heel precies waar je bent, namelijk precies op het einde van een zwarte streep.



Onze opdracht ging echter een andere kant op. Vermoed werd dat soms in de praktijk wel eens een symbool verkeerd uitgelezen kon worden. Dit heeft te maken met de snelheid waarmee de as beweegt, de nauwkeurigheid waarmee de streepjes van 0,2 mm en 0,4 mm aangebracht zijn en eventuele onzuiverheden op de as. Maar één enkele 1 die als 0 uitgelezen wordt of andersom geeft meteen aanleiding tot een totaal verkeerde plaatsbepaling. Hier was onze hulp nodig. Het goede nieuws was dat het technisch gezien mogelijk bleek met de camera meer dan 14 symbolen tegelijk te kunnen uitlezen. We mochten uitgaan van 19 opeenvolgende symbolen.

Aanpak

De opdrachtgever was er zelf al achter gekomen dat je inderdaad rijen van $2^{14} - 1$ nullen en enen kunt maken zodat alle deelrijtjes van 14 opeenvolgende symbolen verschillend zijn. Maar hoe maak je zo'n rij?
We zullen nu eerst wat aandacht besteden aan de wiskundige achtergrond, en gebruik maken van de structuur van eindige lichamen. Uitgangspunt daarbij is F_2, het lichaam van 2 elementen, gerepresenteerd door 0 en 1. Optellen en vermenigvuldigen zijn gedefinieerd door te rekenen modulo 2. Algebraïsche uitbreidingen van dit lichaam kun je maken door alle veeltermen met coëfficiënten in F_2 te bekijken, en te rekenen modulo een vast gekozen binaire veelterm. Als deze vast gekozen veelterm irreducibel (onontbindbaar) is, dan is de verzameling van veeltermen over F_2 modulo deze veelterm weer een lichaam.
We bekijken een voorbeeld. De veelterm $x^3 + x + 1$ is irreducibel. Dat is hier gemakkelijk in te zien. Omdat het een veelterm van de graad 3 is, hoeven we alleen maar te kijken of deze een nulpunt in F_2 heeft. Dat is duidelijk niet het geval, want 0 en 1 zijn geen nulpunten, en daarom is deze veelterm irreducibel. Voor hogeregraads veeltermen is dit veel lastiger vast te stellen. Als we rekenen met de veeltermen modulo $x^3 + x + 1$, dan is $x^3 + x + 1 = 0$,
dus $x^3 = -x - 1 = x + 1$. Bij het rekenen modulo $x^3 + x + 1$ zijn er in feite maar 8 verschillende veeltermen: 0, 1, x, $x + 1$, x^2, $x^2 + 1$, $x^2 + x$, $x^2 + x + 1$. Immers, elke hogeregraads veelterm laat zich modulo $x^3 + x + 1$ herschrijven tot één van deze acht. Nu heeft de veelterm $x^3 + x + 1$ nog een bijzondere eigenschap. Als we namelijk modulo deze veelterm rekenen, dan blijkt dat van de 8 zojuist genoemde veeltermen, die modulo $x^3 + x + 1$ dus alle veeltermen representeren, de veeltermen $\neq 0$ geschreven kunnen worden als een macht van x:
$x^0 = 1$
$x^1 = x$
$x^2 = x^2$
$x^3 = x + 1$
$x^4 = x(x + 1) = x^2 + x$
$x^5 = x^2(x + 1) = x^3 + x^2 = x^2 + x + 1$
$x^6 = (x + 1)^2 = x^2 + 1$
De veelterm $x^3 + x + 1$ heet om die reden een *primitieve* veelterm. Gebaseerd op deze primitieve veelterm maken we nu een binaire rij $\{s_i\}_{i \geq 0}$ door middel van een recurrente betrekking als volgt:
- we kiezen s_0, s_1, s_2 willekeurig, niet alle drie gelijk aan 0,
- daarna met $n \geq 0$: $s_{n+3} = s_{n+1} + s_n$.

Het verband met de gekozen veelterm: vervang in $x^3 = x + 1$ de x^i door s_{n+i}.
Kiezen we bijvoorbeeld als beginsituatie $(s_0, s_1, s_2) = (1, 0, 0)$, dan krijgen we de rij 1, 0, 0, 1, 0, 1, 1, die zich voortzet met periode $2^3 - 1 = 7$. Zouden we begonnen zijn met een irreducibele, niet-primitieve veelterm, dan zou het resultaat heel anders geweest zijn.
Bekijken we bijvoorbeeld alle veeltermen modulo $x^4 + x^3 + x^2 + x + 1$ (deze veelterm is irreducibel), dan geldt dus $x^4 = x^3 + x^2 + x + 1$. En dan volgt dat
$x^5 = x(x^3 + x^2 + x + 1) = x^4 + x^3 + x^2 + x = 1$. In het lichaam van 16 elementen dat we op deze manier krijgen, is niet elk element te schrijven als een macht van x.

Zouden we op een analoge manier als hierboven beschreven een rij definiëren via de recurrente betrekking:
$s_{n+4} = s_{n+3} + s_{n+2} + s_{n+1} + s_n$
dan krijgen we een rij met periode 5, en niet met periode 15. Er blijkt algemeen te gelden (zie bijvoorbeeld sectie 13.5 in [1] dat gewijd is aan *maximum-length shift-register codes*): als we op bovenstaande wijze via een recurrente betrekking een binaire rij $\{s_i\}_{i \geq 0}$ construeren, uitgaande van een veelterm van de graad n, dan heeft deze rij periode $2^n - 1$ precies dan als de veelterm primitief is.
We keren nog even terug naar het eerste voorbeeld. We bekijken twee opeenvolgende volledige periodes van de rij:
1, 0, 0, 1, 0, 1, 1, 1, 0, 0, 1, 0, 1, 1
In deze rij kunnen we 7 rijtjes van 7 opeenvolgende symbolen maken: (1, 0, 0, 1, 0, 1, 1), (0, 0, 1, 0, 1, 1, 1), (0, 1, 0, 1, 1, 1, 0), (1, 0, 1, 1, 1, 0, 0), (0, 1, 1, 1, 0, 0, 1), (1, 1, 1, 0, 0, 1, 0) en tenslotte (1, 1, 0, 0, 1, 0, 1). Zoals gemakkelijk is na te gaan, verschillen elk van deze $7 = 2^3 - 1$ rijtjes op precies $4 = 2^{3-1}$ plaatsen van elkaar. Uit de coderingstheorie (zie opnieuw sectie 13.5 in [1]) weten we dat dit ook algemeen geldt: als we uitgaande van een primitieve veelterm van de graad n een binaire rij construeren zoals aangegeven, en we vormen uit een dubbele periode rijtjes van $2^n - 1$ opeenvolgende symbolen, dan verschilt elk tweetal rijtjes in precies 2^{n-1} plaatsen van elkaar.
Keren we nu terug naar het oorspronkelijke probleem. Voor $n = 14$ is bijvoorbeeld $x^{14} + x^{10} + x^6 + x + 1$ een primitieve veelterm.

De binaire rij $\{s_i\}_{i \geq 0}$ die gedefinieerd wordt door
$$s_{n+14} \equiv s_{n+10} + s_{n+6} + s_{n+1} + s_n \quad (n \geq 0) \qquad (1)$$
(waarbij het beginrijtje $s_0, s_1, \ldots, s_{13}$ willekeurig gekozen mag worden zolang maar niet $s_0 = s_1 = \ldots = s_{13} = 0$) heeft dan de maximale periode $2^{14} - 1 = 16383$. Nu is het vinden van een primitieve veelterm een lastige zaak; controleer bijvoorbeeld maar eens dat $x^{14} + x^{10} + x^6 + x + 1$ inderdaad primitief is. We kunnen zo'n primitieve veelterm alleen maar vinden door middel van een tabel of een geschikt softwarepakket, zoals bijvoorbeeld Maple of Mathematica.
Als we eenmaal gekozen hebben voor de recurrente betrekking van (1), weten we dat alle venstertjes van de grootte 14 er verschillend uitzien, maar één enkele fout uitgelezen waarde levert al meteen een verkeerde positiebepaling op of geeft zelfs aanleiding tot een niet-bestaande positie.
In de analyse van het probleem gaan we de venstertjes groter maken, dus 15 of 16 groot of nog meer. We doen net of de as twee keer zo lang is en herhalen een volledige periode van $\{s_i\}_{i \geq 0}$ zodat ook de langere venstertjes volledig gevuld blijven met symbolen. (Het gedrag aan de uiteinden van de as is toch niet zo interessant.)
Wat we gaan doen is een geschikte recurrente betrekking vinden zodat, als we met een venstergrootte van 19 de op de as aangebrachte rij uitlezen, we rijtjes kijken die maximaal van elkaar verschillen. We weten al dat bij venstergrootte 14 de rijtjes slechts op één plaats van elkaar kunnen afwijken (en dus dat geen fouten-correctie mogelijk is) en dat bij venstergrootte $2^{14} - 1$ ze op steeds $2^{13} = 8192$ plaatsen van elkaar verschillen. Dat betekent dat, als er 4095 symbolen foutief uitgelezen worden, de camera nog steeds een rijtje ziet dat meer lijkt op het rijtje dat er had moeten staan, dan op elk ander mogelijk rijtje op de as. Het aantal coördinaten waarop twee rijtjes van elkaar verschillen, wordt wel de *afstand* tussen die rijtjes genoemd.

De beste oplossing

We weten dat als we de recurrente betrekking
$$s_{n+14} \equiv a_{13}s_{n+13} + a_{12}s_{n+12} + \cdots + a_1 s_{n+1} + a_0 s_n \quad (n \geq 0) \qquad (2)$$
beschouwen, die geassocieerd is met een primitieve veelterm $x^{14} + a_{13}x^{13} + \cdots a_1 x + a_0$, de onderlinge afstand tussen uitgelezen vensters minimaal 1 is bij venstergrootte 14 en precies 8192 bij venstergrootte 16383. De vraag is dus welke veelterm de beste waarde oplevert bij venstergrootte 19. Het moge duidelijk zijn, dat vergroting van de venstergrootte nooit tot een verkleining van de onderlinge afstand kan leiden. Bij vergroting van de vensterlengte krijgen we dus altijd een monotoon niet-dalende rij, beginnend bij 1 en eindigend met 8192. Het verloop verschilt echter van recurrente betrekking tot recurrente betrekking.
Omdat de primitiviteit van veeltermen al zo moeilijk te voorspellen is, hebben we dit probleem met een computerprogramma aangepakt. Het blijkt dat optimaal gekozen veeltermen tot de volgende tabel aanleiding geven.

venster-grootte									
14	15	16	17	18	19	20	21	22	23
minimum afstand									
1	1	2	2	2	3	3	3	4	4

tabel Hoogst realiseerbare afstand bij gegeven venstergrootte

Deze tabel moet als volgt geïnterpreteerd worden: bij venstergrootte 19 zijn er primitieve veeltermen met bijbehorende recurrente betrekkingen die de eigenschap hebben dat verschillende posities op de as uitlees-rijtjes van de lengte 19 opleveren die altijd op minimaal 3 plaatsen van elkaar verschillen. Bij venstergrootte 18 is afstand 2 echter niet te vermijden. Afstand 3 betekent dat één door de camera verkeerd uitgelezen symbool nog steeds een rijtje oplevert dat meer lijkt op het origineel bedoelde rijtje dan op enig ander rijtje op de as. Voor PNEU/TEC was dit dus het beste wat gedaan kon worden. Eén van de (weinige) recurrente betrekkingen die afstand 3 realiseerde is

$$s_{n+14} \equiv s_{n+13} + s_{n+9} + s_{n+7} + s_{n+6} + s_{n+4} + s_{n+3} + s_{n+2} + s_n \quad (n \geq 0) \qquad (3)$$

Met minder dan 9 termen in de recurrente betrekking lukt het niet.
Er is ook nog gekeken hoe je efficiënt een fout uitgelezen symbool kunt herkennen en verbeteren, maar PNEU/TEC liet weten dat het veel gemakkelijker voor hen was een tabel te maken van alle 16383 mogelijke venster-rijtjes en het ontvangen rijtje daarmee te vergelijken.

Afloop

De afloop van het verhaal is een beetje teleurstellend. Recent contact met PNEU/TEC leverde ons het volgende verslag op.
Het bedrijf heeft indertijd een werkend model van dit ontwerp gemaakt. Ze hebben ook patenten verworven op deze technologie. Om het idee echter in productie te nemen hadden ze indertijd een grotere partner nodig en die was niet voorhanden. Naderhand is het project in de vergetelheid geraakt.
Voor ons was dit onderzoek toch erg interessant. Wiskundigen weten dat elk primitief polynoom overgevoerd kan worden in elk ander primitief polynoom van dezelfde graad. Voor hen zijn ze dus allemaal 'hetzelfde'. Ons onderzoek toont aan dat dit in een praktische toepassing allerminst het geval is.

Referenties

[1] E.R. Berlekamp: *Algebraic coding theory*, Revised 1984 edition. Laguna Hills: Aegean Park Press (1984).
[2] H.C.A. van Tilborg, S.W. Rienstra, F.C. Bussemaker: *Code voor positionering van een as*. Eindhoven: Eindhoven University of Technology (Rapport IWDE 94-02, 1994).

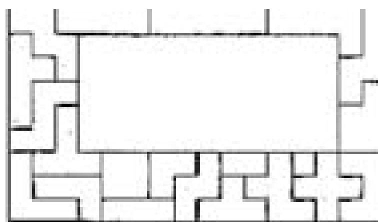
Over de auteurs

Henk van Tilborg is hoogleraar aan de Faculteit Wiskunde en Informatica van de Technische Universiteit Eindhoven in coderingstheorie en cryptografie. Hij heeft enkele masterclasses over deze onderwerpen verzorgd.
Bram van Asch is redacteur van Euclides. Hij werkt als universitair docent aan de Technische Universiteit Eindhoven, en is daar ondermeer betrokken bij de eerstegraads lerarenopleiding.
E-mailadressen: *a.g.v.asch@tue.nl* en *h.c.a.v.tilborg@tue.nl*

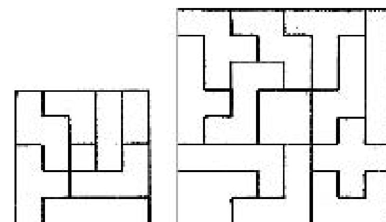
Puzzel 825

Polyomino's

[Frits Göbel]



figuur 1



figuur 2

Voor het oplossen van de opgaven zijn, ondanks de titel, geen blokjes nodig. Voor de eerste zelfs geen plaatjes; voor de andere twee is ruitjespapier voldoende. Ik hoop hiermee tegemoet te komen aan de inzenders die niet al te dol zijn op puzzelen met blokjes.

Opgave 1
Gegeven zijn n tegels van 1 bij 1 ($n \geq 10$). Vorm hiermee een rechthoek met een zo groot mogelijk rechthoekig gat.

Het is handig om n even en n oneven apart te bekijken. Het gat hoeft niet 'centraal' gelegen te zijn, maar het mag ook niet aan de rand raken.

Voor de opgaven 2 en 3 gebruiken we 21 stukken: de n-omino's voor n = 1, 2, 3, 4, 5. Het totale aantal cellen is dus $12 \times 5 + 5 \times 4 + 2 \times 3 + 2 + 1 = 89$. Na opgave 1 weten we hoe groot het grootste rechthoekige gat in een rechthoek is als je 89 losse vierkantjes hebt (286), maar nu gaan we met die 21 stukken aan de slag.

Opgave 2
Vorm met bovengenoemde 21 stukken een rechthoek met een zo groot mogelijk rechthoekig gat, niet aan de rand.

Een voorbeeld ziet u in ***figuur 1***. Ten overvloede: het gat is niet maximaal.

89 is een priemgetal, dus een rechthoek zonder gat is niet mogelijk. Maar je kunt de verzameling stukken splitsen en proberen om twee rechthoeken te vormen. Dat lukt, en wel op talloze manieren. Je kunt zelfs twee vierkanten vormen. 'Ken uw klassieken!' en een oplossing is snel gevonden; ***zie figuur 2***.

Opgave 3
Splits de verzameling van 21 stukken zo in groepen dat van iedere groep een vierkant kan worden gelegd, waarbij het aantal groepen zo groot mogelijk is.

Oplossingen kunt u mailen naar *a.gobel@wxs.nl* of per gewone post sturen naar F. Göbel, Schubertlaan 28, 7522 JS Enschede.
Er zijn weer maximaal 20 punten te verdienen met uw oplossing.
De deadline is 29 maart 2007.
Veel plezier!

Oplossing 823

Dirichlet-cellen

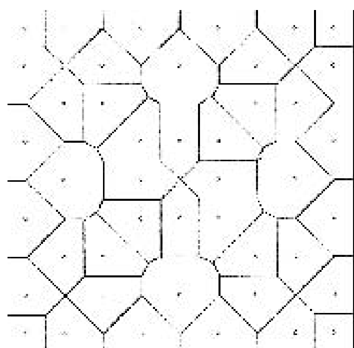
Er waren 10 inzendingen.
Opgave 1 gaf geen problemen. Aan de oplossing van Ton Kool ontleen ik ***figuur 3***. De negenhoekige gebieden vormden eigenlijk de enige moeilijkheid bij deze opgave.

Opgave 2 was voor menigeen een stuk lastiger. De meesten zagen wel dat de gevraagde vorm een twaalfvlak moest zijn. Het is echter geen regelmatig twaalfvlak, maar een ruitentwaalfvlak. Slechts 5 van de 10 inzenders zagen dit. Hier volgt een korte toelichting van het resultaat.
De 12 punten die het dichtst bij de oorsprong liggen, hebben als coördinaten 0, 0, 1 en -1 in een of andere volgorde. Deze punten liggen in de R^3 volgens een regelmatig patroon. Een eenvoudige representatie is de volgende.
Neem een kubus met ribbelengte 2. De middens van de ribben liggen dan in bovengenoemd patroon en de oorsprong ligt in het middelpunt van de kubus (***zie figuur 4***). Ter illustratie: de punten waarvan de eerste coördinaat 0 is, zijn de hoekpunten van een regelmatige zeshoek, liggend in een vlak loodrecht op een lichaamsdiagonaal. De 12 middelloodvlakken van enerzijds de oorsprong en anderzijds de 12 'buurpunten' bepalen een ruitentwaalfvlak. Het is nu eenvoudig in te zien dat middelloodvlakken tussen de oorsprong en verdere punten geen invloed hebben.

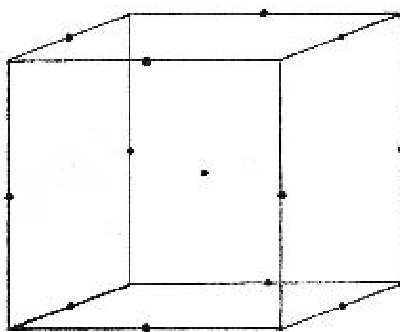
Ladderstand

De top van de ladder ziet er nu als volgt uit:
T. Kool 376
W. van den Camp 366
H.J. Brascamp 352
J. Meerhof 344
L. de Rooij 214
G. Riphagen 177

De prijs voor de beste inzending van deze opgaven is na rijp beraad verdeeld onder Gerhard Riphagen en Wobien Doyer, en daarna verhoogd tot 20 euro per persoon. Van harte gefeliciteerd!



figuur 3



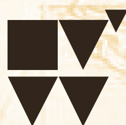
figuur 4

SERVICEPAGINA

Voor overige internet-adressen zie
www.wiskundepersdienst.nl/agenda.php

Voor Wiskundeonderwijs Webwijzer zie
www.wiskundeonderwijs.nl

Publicaties van de Nederlandse Vereniging van Wiskundeleraren



Zebraboekjes
1. Kattenaids en Statistiek
2. Perspectief, hoe moet je dat zien?
3. Schatten, hoe doe je dat?
4. De Gulden Snede
5. Poisson, de Pruisen en de Lotto
6. Pi
7. De laatste stelling van Fermat
8. Verkiezingen, een web van paradoxen
9. De Veelzijdigheid van Bollen
10. Fractals
11. Schuiven met auto's, munten en bollen
12. Spelen met gehelen
13. Wiskunde in de Islam
14. Grafen in de praktijk
15. De juiste toon
16. Chaos en orde
17. Christiaan Huygens
18. Zeepvliezen
19. Nullen en Enen
20. Babylonische Wiskunde
21. Geschiedenis van de niet-Euclidische meetkunde
22. Spelen en Delen
23. Experimenteren met kansen

Zie verder ook *www.nvvw.nl/zebrareeks.html* en/of *www.epsilon-uitgaven.nl*

Nomenclatuurrapport Tweede fase havo/vwo
Dit rapport en oude nummers van Euclides (voor zover voorradig) kunnen besteld worden bij de ledenadministratie (zie Colofon).

Wisforta – wiskunde, formules en tabellen
Formule- en tabellenboekje met formulekaarten havo en vwo, de tabellen van de binomiale en de normale verdeling, en toevalsgetallen.

Honderd jaar wiskundeonderwijs, lustrumboek van de NVvW
Het boek is met een bestelformulier te bestellen op de website van de NVvW: *www.nvvw.nl/lustrumboek2.html*
Voor overige NVvW-publicaties zie de website: *www.nvvw.nl/Publicaties2.html*

Kalender

In de kalender kunnen alle voor wiskundedocenten toegankelijke en interessante bijeenkomsten worden opgenomen. Relevante data graag zo vroeg mogelijk doorgeven aan de hoofdredacteur, het liefst via e-mail (*redactie-euclides@nvvw.nl*). Hieronder vindt u de verschijningsdata van Euclides in de lopende jaargang. Achter de verschijningsdata is de deadline vermeld voor het inzenden van mededelingen en van de *eind*versies van geaccepteerde bijdragen; zie daarvoor echter ook *www.nvvw.nl/euclricht.html*.

nr.	verschijnt	deadline
6	12 april 2007	27 februari 2007
7	24 mei 2007	3 april 2007
8	21 juni 2007	8 mei 2007

donderdag 8 maart, Utrecht
Cursus: Rekenproblemen (vervolg op ma. 16 april)
Organisatie APS

woensdag 14 maart, Utrecht
Cursus: Wiskunde in de vernieuwde onderbouw (herhaling)
Organisatie APS

vrijdag 16 maart, op de scholen
Kangoeroe-wedstrijd
Organisatie Stichting Wiskunde Kangoeroe i.s.m. RU Nijmegen

vr. 16 en za. 17 maart, Garderen
Finale Wiskunde A-lympiade
Organisatie FIsme

do. 22 maart en vr. 23 maart, Noordwijkerhout
Nationale Rekendagen 2007
Organisatie FIsme en NVORWO

donderdag 29 maart, Amsterdam
Docentencursus: De werkelijkheid in een digitale doos
Organisatie UvA

maandag 2 april, Utrecht
Studiemiddag: Dyscalculie
Organisatie APS

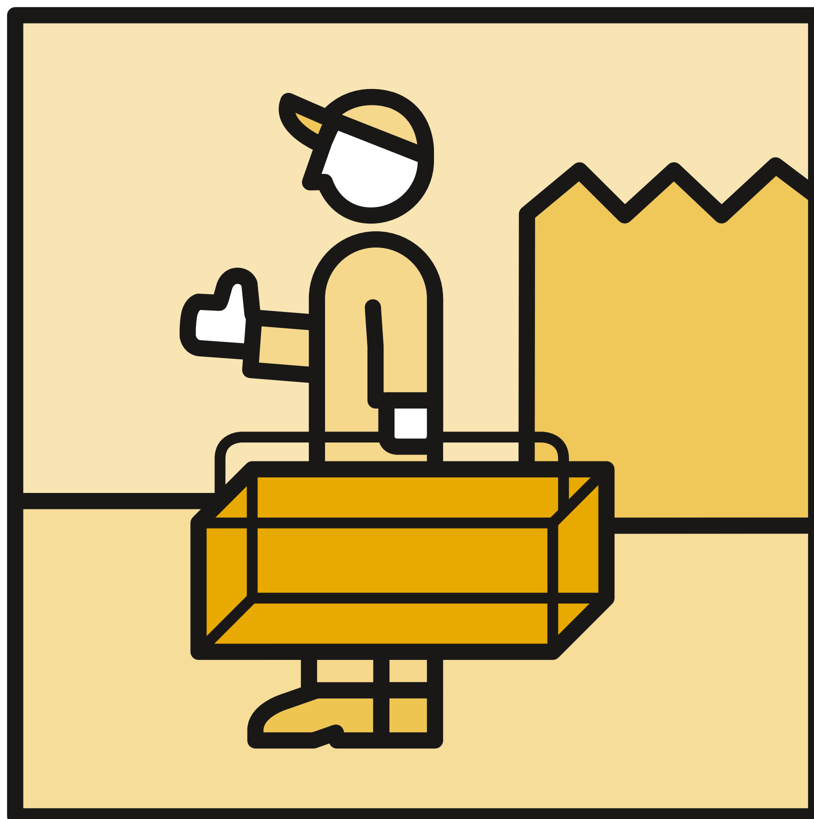
donderdag 12 april, Utrecht
Studiedag: Wiskunde op weg naar 2010 (herhaling)
Organisatie APS en cTWO

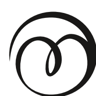
do. 12 en vr. 13 april, Leiden
43ste Nederlands Mathematisch Congres
Organisatie Universiteit Leiden en TU Delft

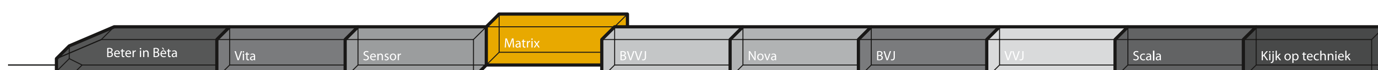
vrijdag 13 april, Amsterdam
Leve de wiskunde!
Organisatie KdV-Instituut (UvA)

woensdag 18 april, op de scholen
Grote Rekendag (meetkunde, patronen, kunst)
Organisatie FIsme

vrijdag 20 april, Amsterdam
Docentencursus: De werkelijkheid in een digitale doos
Organisatie UvA







Beter in Bèta
Vita
Sensor
Matrix
BVVJ
Nova
BVJ
VVJ
Scala
Kijk op techniek